تقريب دوال بيسل باستخدام الشبكات العصبية الاصطناعية

أ.حدهم عمر حسن[1]، د.هشام محمد خضر[2]،أ.خليفة احمد سعد[3]

1.جامعة طرابلس/ كلية التربية– جنزور 2. جامعة الموصل/كلية الحاسوب والرياضيات 3. مركز الرقابة على الأغذية والأدوية

Abstract

In this research, feed-forward artificial neural networks is used to approximate Bissell functions of the first, second and third types. We have taken the Levenberg Marquardt (LM) algorithm to train this artificial network. The practical results proved a high efficiency in approximating the Bissell functions, where we obtained very close results. For the exact results of the functions, we used the Matlab 2020 program to train artificial neural networks**.**

المستخلص

في هذا البحث قمنا باستخدام الشبكات العصبية الاصطناعية ذات التغذية الامامية لتقريب دوال بيسل من النوع الأول والثاني والثالث وقد اخذنا خوارزمية ليفينبيرك ماركوارت Levenberg Marquardt (LM) لتدريب هذه الشبكة الاصطناعية، وقد اثبتت النتائج العملية كفاءة عالية في تقريب دوال بيسل حيث حصلنا على نتائج مقاربة جداً للنتائج المضبوطة للدوال، وقد استخدمنا برنامج ماتلاب 2020 لتدريب الشبكات العصبية الاصطناعية.

الكلمات المفتاحية:الشبكات العصبية الاصطناعية، تعليم الالة، دوال بسل، خوارزمية ليفينبيرك ماركوارت، تقريب، الماتلاب.

1- المقدمة

في هذا البحث نقوم بتدريب الشبكات العصبية ذات التغذية الامامية للانتشار العكسي (الخلفي) التقليدية للخطأ لتقريب دوال بيسل من النوع الأول والثاني والثالث.من المعروف أن شبكة الانتشار العكسي للخطأ القياسي تمثل تطبيقاً ناجحاً للعديد من المسائل لكونها مضمونة الوصول الى الهدف اذا كان عامل التعليم صغير بما فيه الكفاية ألا انها تعاني من مشكلة التقارب البطيء بسبب مسارها المتعرج(Zigzag) للوصول الى النقطة المثلى والناتج من استعمال عامل تعلم ثابت اثناء التدريب فضلاً عن ذلك هناك مشاكل تعيق هذه الشبكةلاسيما في تطبيقات المسائل المعقدة ويحتاج الى وقت كبير لتدريبها قد يستغرق ساعات فضلاً عن الأف التكرارات للوصول الى الحل الأمثل.

يرجع تاريخ الشبكات العصبية إلى ما هو أقدم مما يعتقده معظم الناس. في حين أن فكرة "الآلة التي تفكر" يمكن أن ترجع إلى الإغريق القدماء، سوف نركز على الأحداث الرئيسية التي أدت إلى تطور التفكير حول الشبكات العصبية، التي انحسرت شعبيتها وازدادت على مر السنين:عام (1958) قدم العالم (Rosenblatt) باستعراض نموذج لخلية عصبية صناعية تدعى (Perceptron) المعرفة على التدريب. عام (1960) اخترع العالمان (Widrow and Hoff) قاعدة التعليم بإشراف، التي تعتمد على تقليل الخطأ اثناء عملية التدريب التي تتضمن تصنيف النماذج، وفي نهاية الستينات الى الثمانينات من القرن الماضي شهدت الشبكات العصبية الاصطناعية ركودا بسبب محدوديات نظريات التعليم الموجودة في ذلك الوقت, لكن التطور الكبير في الشبكات العصبية الاصطناعية كان بظهور طريقة التعليم بالترتيب الذاتي للخصائص.عام (1982) على يد العالم (Kohonen) قدم خوارزمية الانتشار ذات الاتجاه العكسي بأستخدام طريقة التعليم. عام (1986) على يد الباحثين (Ronald William amdRnmelhart) طورت هذه الطريقة[1].شهدت نهاية القرن الماضي تطورا ملحوظا في استخدام الشبكات العصبية الاصطناعية في مجالات عده. منها المجال الطبي استعمل العالم (Ross J. Maxwell) .عام (1993) شبكات عصبية اصطناعية لتميز عينات الانسجة الحية السليمة من المريضة الحاوية على اورام من خلال تحليل البيانات المأخوذة من جهاز الرنين المغناطيسي كما استعملها العالم (Errington) بالتميز العام الاوتوماتيكي للأنواع المختلفة للكروموسومات فضلا

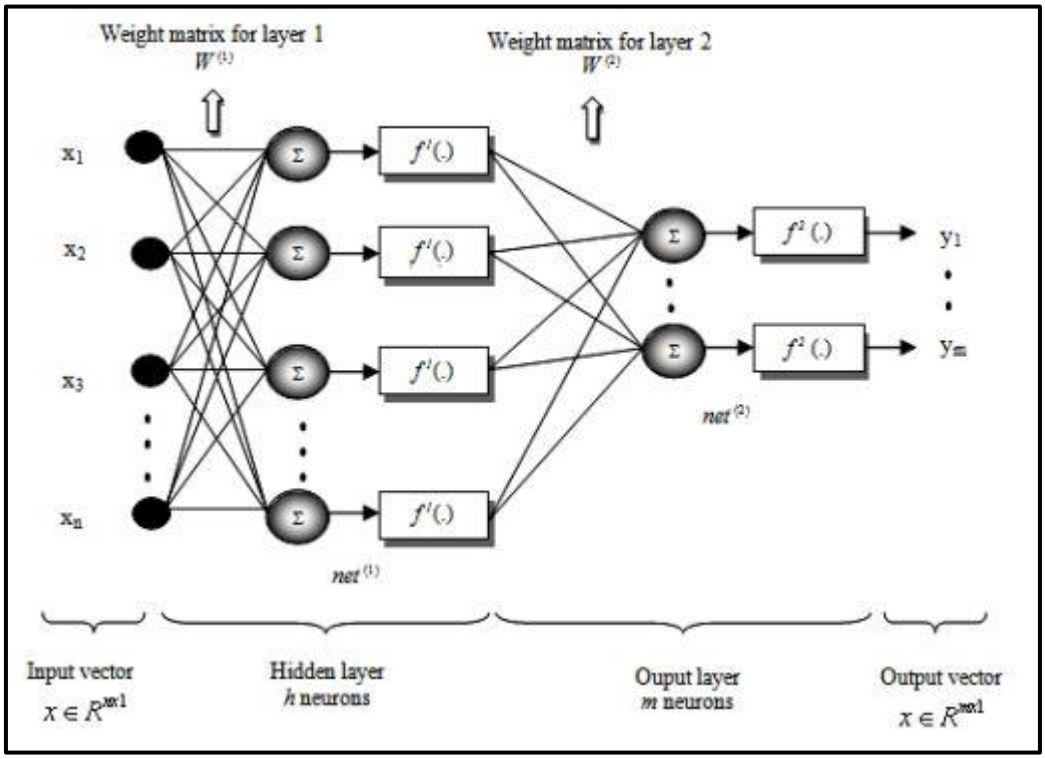
عن استعمال الشبكات العصبية في المجالات الامنية من خلال التعرف على البصمات وملامح الوجه حتى بوجود تشويش وعدم وضوح الامضاءات. اما في مجال السيطرة فان للشبكات العصبية تطبيقات واسعة فقد تم استعمالها لتطوير انظمة ملاحية للسفن يمكنها تفادي العقبات اثناء الملاحة في الاماكن الضيقة كما استعملت للتحكم في سرعة محرك التيار المستمر (dc motor) ذي السلوك غير الخطي[2].في عام (2006) قدم الباحثان (Chunchao andGuoshan) طريقة جديدة من طرائق المسيطر التناسبي التفاضلي (PID controller) مستندة على استعمال الشبكة العصبية الاصطناعية ذات الانتشار العكسي (BPNN) تدرب باشراف للوصول الى النقطة الصغرى المحلية (Local minimum point) وهو ما يسمى بـــ (Steepest descent) الا ان هذه الطريقة بطيئة نوعا ما مما دفع الباحثين الى استعمال طريقة (conjugate gradient) بدلا من (SD) للوصول الى النقطة المطلوبة وهو ما أعطى الشبكة انحدارا سريعا ومن ثم سرعة عالية في الوصول الى ادنى نقطة. كما اجرى الباحثان لميس، بلال دراسة عام (2006) الشبكات العصبونية الاصطناعية في استخلاص الضجيج من أجهزة إدراك الكلام، استخدم شبكة متعددة الطبقات من نوع feed forward وتم تدريبها باستخدام خوارزمية مرشح كالمن الثنائي المطور لإزالة اللااستقرارية والضجيج من الكلام ومدى فاعليتها في هذا المجال وهذا يكون دافع قوي لاستخدامها ويبقى إزالة الضجيج من الكلام مسألة تحدي لإعطاء استنتاجات واضحة وبالتالي الشبكات العصبونية تقدم أداة فعالة لذلك عن طريق استخدام شبكات أكثر تطورا[3]. وفي عام (2011) أجرى كل منlivieris , Pintelas دراسة مفصلة عن بعض خوارزميات تعليم الشبكات العصبية الاصطناعية ذوات التغذية الامامية. في عام (2013) قدم الباحثين دراسة عن حساب عامل التعليم مستند على مشتقة دالة سيكمود[4].ففي مجال نمذجة السكان استخدم الباحث (هشام) عام (2015) شبكات عصبية اصطناعية للتنبؤ بحجوم السكان من حيث نمو وتقلص اعداد السكان[1].للشبكات العصبونية تطبيقات فعالة وجيدة في مجالات هندسية وعلمية كثيرة، وخاصةً عند التعامل مع حجم كبير من المعطيات منها:اكتشاف الظواهر الطبية، حيث يمكن مراقبة بعض الظواهر الطبية مثل المؤشرات الصحية المختلفة. لقد استخدمت الشبكات العصبية في ملاحظة نموذج التنبؤ المناسب للعلاج لوصفة المريض.التنبؤ باسعار الاسهم في سوق المال: تذبذب اسعار الاسهم و مؤشرات الاسعار مثال معقد متعدد الابعاد، استخدمت الشبكات العصبية من قبل عدد من المحللين الفنيين لقياس تنبؤات عن اسعار الاسهم مقابل عدد من العناصر المؤثرة مثل الاداء السابق للسوق و المؤشرات الاقتصادية.منح القروض الائتمانية: أجزاء متنوعة من المعلومات تعرف عادة عن العميل المتقدم للحصول علي قرض، من هذه المعلومات عمر العميل و تعليمه و عمله و عناصر اخرى ممكن ان تكون متاحة. بعد تدريب الشبكة العصبية علي البيانات التاريخية تستطيع الشبكة العصبية ان تحلل معظم مواصفات العميل و تستخدمها لتصنيف العمل كعميل جيد او عميل سيئ .مراقبة ظروف تشغيل الآلات: ممكن للشبكات العصبية ان تخفض الاسعار باستغلال الخبرة في مجال الصيانة الوقائية للآلات، حيث يمكن تدريب الشبكات العصبية للتمييز بين اصوات الماكينات عندما تعمل بشكل طبيعي واصواتها عندما يكون هنا كمشكلة، بعد فترة التدريب تلك يمكن استخدام خبرة الشبكة لتحذير الفنيين عن العطل القادم مستقبلا قبل حدوثه.إدارة المحركات: تستخدم الشبكات العصبية هنا في تحليل المدخل الي حساسات القياس sensors من محرك ما، تتحكم الشبكة العصبية في العناصر المؤثرة المختلفة حيث يعمل المحرك، لكيتنجز هدفا ما مثل خفض استهلاك الوقود،اكتساب المعارف، معالجةاللغات الطبيعية، التعرف على المحارف، ضغط الصور .تطبيقات طبية : مثل التشخيص الطبي، المنظومات المساعدة في اتخاذ القرار، معالجة الإشارة والرؤية الآلية والربوتية،التحكم والاتمتة. ففي دراسة عزيز عام (2018) استخدم اربعة نماذج للشبكات العصبونية الديناميكية ذات التغذية الأمامية والانتشار العكسي للخطأ للتنبؤ بعكارة المياه من محطة تنقية المياه، استخدمت بيانات عكارة المياه للتحقق من دقة أداء هذه الشبكة، حيث أثبتت النتائج قدرتها في نمذجة ومحاكاة السلوك غير الخطي للعكارة والتنبؤ بقيمتها،وهو مايدعم استخدامها في محطة تنقية مياه الشرب للمساهمة في تحقيق الاستقرار في عمل المحطة وتقليل تكاليف التشغيل، كما إن استخدام البارامترات المؤثره فيزيائياً على قيم عكارة مياه الشرب المرشحة يحسن أداء هذة الشبكة[5]. اقترح الباحثان فادي، فاتن عام (2021) نظام تشخيص لكشف أورام الدماغ وتصنيفها في صورة الرنين المغناطيسي بالاعتماد على الشبكة العصبونية حيث استخدم في البداية شبكة من نوع **SOM** لكشف منطقة الورم، معالجة الصورة وتحسينها، بعد ذلك تم استخلاص بعض السمات والخصائص لتدريب شبكة عصبونية أخرى ذات تغذية أمامية لتشخيص نوع الورم بناءًعلى الخصائص المكتشفة. وأظهرت النتائج دقة وموثوقية النظام كأداة مساعدة للكادر الطبي الممارس[6]. كما استخدم الباحثان رانيا ،روعة عام (2021) الشبكات العصبونية للكشف عن البرمجيات الضارة في نظام أندرويد.نتيجة ازدياد عدد التطبيقات المنتشرةعلى المتجر في الهواتف المحمولة ،واستخدامها كان له أثر إيجابي في تحسين الكشف عن البرمجيات الضارة وذلك

يتوقف على عدد الطبقات وعدد العصبونيات المستخدمة لبناء الشبكة، كما لها القدرة على مواجهة الهجوم والأذى الذي يتسبب التطبيق المشبوة من خلال الاعتماد على مجموعة من الميزات لبناء شبكة عصبونية تساعد في تحديد نوع وحالة التطبيق[7]. تكمن أهمية البحث في الاعتماد على الذكاء الاصطناعي والشبكات العصبية الاصطناعية في تقريب الدوال خاصة في الدوال العقدية والدوال التي تكون من الصعب او غير قابلة للحل من الاساس بالطرق الاعتيادية لذلك نلجأ للطرق العددية والذكائية والشبكات العصبية الاصطناعية لحل مثل هكذا مسائل.

2- الشبكات العصبية الاصطناعية

ان الاهتمام العام بالشبكات العصبية الاصطناعية من الخصائص المميزة الموجودة فيها، وقدرتها على تجاوز مقيدات الحل التقليدي أو محدداته، ومن أهم خصائص الشبكات العصبية الاصطناعية هي امتيازها بخاصية التوازي (Parallelism) التي تعد أساساً معمارياً للشبكات العصبية الاصطناعية، إذ إن كل الخلايا في الشبكة تعمل بشكل متزامن، أي يمثل التوازي قدرة الشبكة العصبية على معالجة البيانات بسرعة عالية جداً حتى إن كانت كمية البيانات ضخمة، وكذلك قدرتها على التكيف والتنظيم الذاتي، وتوفرالشبكات العصبية الاصطناعية قدرات معالجة موثوقاً بها وفضلا عن قابليتها على التكيف من خلال تعديل أوزان ارتباط خلاياها. وتعد الشبكات العصبية الاصطناعية من الوسائل المعاصرة في هذا العصر التي تستخدم الخبرة والذكاء الاصطناعي والتي تماثل العقل البشري والتصرف البشري بحيث تكون قادرةً على العمل بكفاءة عالية على الرغم من كل المعوقات.

يتأثر أداء هذه الشبكة بعوامل عديدة منها اختيار نوعية فئة التدريب, أوزان الشبكة الابتدائية, نسبة التعلم, دالة التنشيط [8,4]. تتركز دراستنا في هذا البحث على شبكة ذات تغذية امامية تتكون من طبقة الادخال وتحتوي على n من الخلايا وطبقة مخفية واحدة بـ N_1 من الخلايا وطبقة الإخراج تحتوي N_2 من الخلايا كما في الشكل (1).



الشكل (1) شبكة متعددة الطبقات

لتكن مجموعة التدريب مكونة من زوج من بيانات الادخال والإخراج المطلوب (target) معرفة بالشكل الاتي

$(p_1, t_1), (p_2, t_2), \dots, (p_m, t_m)$

إذ أن $p_i \in R^n$ تمثل متجه الادخال لكل $i = 1,2 \dots, m$ وان $t_j \in R^{N_2}$ تمثل الإخراج المطلوب (target). وان الشبكة تتعلم عن طريق المشرف(Supervised Training) وبنظام الدفعة الواحدة (Batch SBP) أي تزود الشبكة بكل مجموعة التدريب $(p_1, t_1), (p_2, t_2), \dots, (p_m, t_m)$ قبل القيام بعملية تعديل الأوزان وبعد ذلك تقوم بتعديل الأوزان إذ ان الميول المحسوبة في كل شكل تدريبي تضاف لبعضها البعض لتحديد التغييرات في الأوزان وان دالة الخطأ $E(w)$ في هذه الطريقة تكون بالشكل التالي

$$E(w) = \frac{1}{2}\sum_{i-1}^{m}\sum_{j-1}^{m_2}\left(t_{ji} - y_{ji}\right)^2 \quad (1)$$

حيث ان y_{ji} اخراج الخلية j في طبقة الإخراج اعتمادا على متجه الادخال t_{ji}, p_i الإخراج المطلوب (target) من الخلية j اعتمادا على متجه الادخال p_i. نلاحظ من المعادلة (1) ان تعليم الشبكة يتحقق اذا كانت قيمة الدالة الخطأ صغيرة جداً اذاً يمكن القول ان مسألة تعليم الشبكة العصبية الاصطناعية ذات التغذية الامامية تتمثل في تصغير دالة الخطأ المعرفة في المعادلة (1) حسب نظام الدفعة الواحدة.ويمكن صياغة المسألة بالشكل الاتي

$$Min\big(E(w)\big), w \in R^N \quad (2)$$

اذن N تمثل عدد الأوزان في الشبكة وهذه من مسائل الأمثلة غير المقيدة وبذلك يمكن استعمال طرائق ونظريات الأمثلة غير المقيدة لحل المسألة في أعلاه [1, 9،10].

3- خوارزمية ليفينبيرك ماركوارت Levenberg Marquardt (LM)

تم تصميم خوارزمية(Levenberg Marquardt (LM لمقاربة سرعة التدريب من الدرجة الثانية دون الحاجة إلى حساب مصفوفة .Hessian على افتراض أن وظيفة الخطأ هي نوع من المجموع التربيعي، ثم يمكن أن تكون مصفوفة هيسيه تقترب على النحو التالي:

$$H = J^T J \quad (3)$$

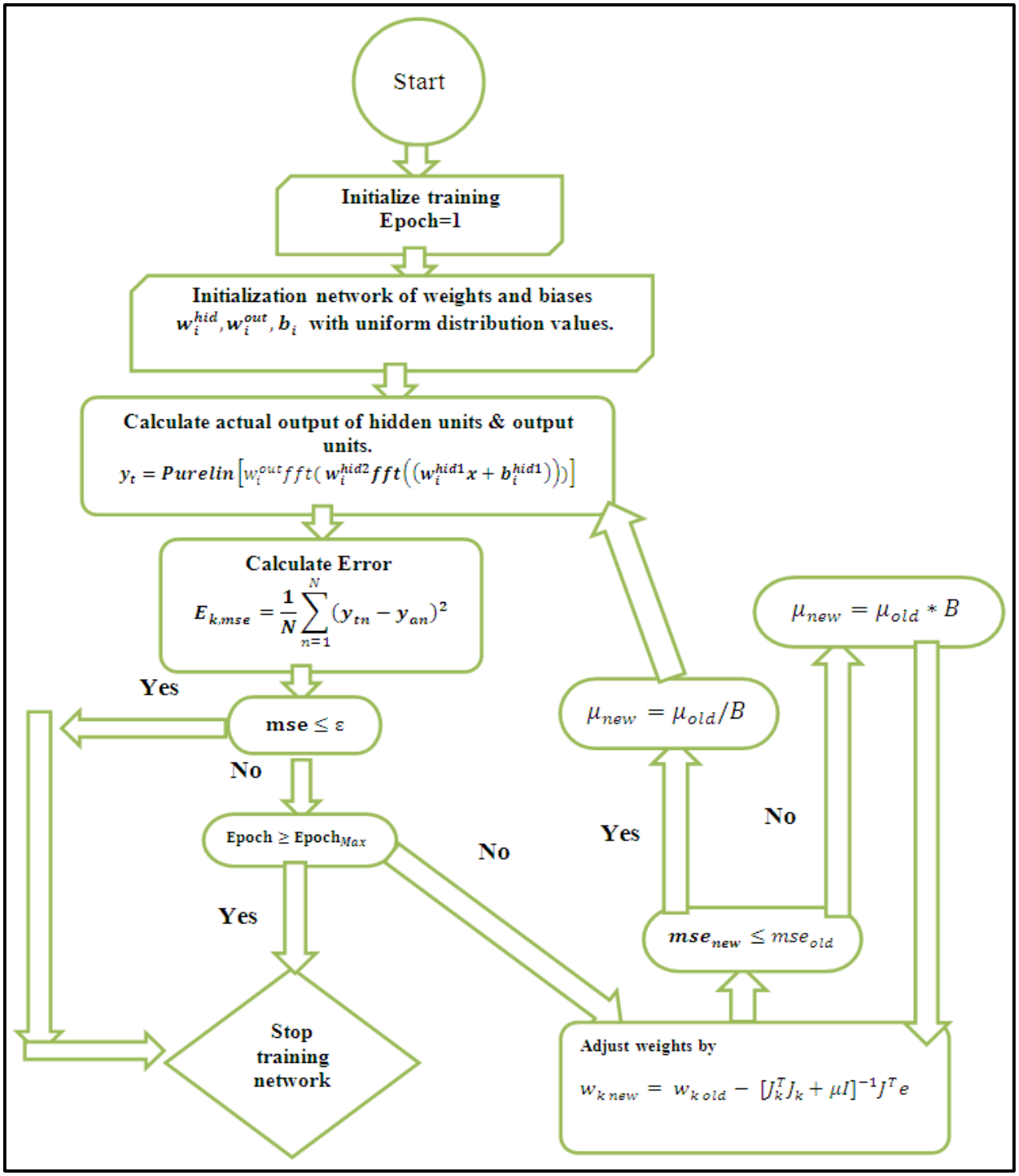
ويمكن حساب التدرج على النحو التالي:

$$g = J^T e \quad (4)$$

حيث: J هي المصفوفة جاكوبي التي تحتوي على المشتقات الأولى لأخطاء الشبكة فيما يتعلق بالأوزان و التحيزات. تحدد مصفوفة جاكوبي أقل تكلفة حسابيا من مصفوفة هيسيان؛ حيث e هي متجه أخطاء الشبكة.ثم يمكن تعديل التحديث على النحو التالي:

$$w_{k+1} = w_k - [J^T J + \mu I]^{-1} J^T e \quad (5)$$

المعلمةμهي مقياس رقمي يتحكم في سلوك الخوارزمية.بالنسبة إلى $\mu = 0$، فإن الخوارزمية تتبع طريقة نيوتن، باستخدام مصفوفة هيسيان التقريبية.عندما تكون μ عالية، يصبح هذا انحداراً متدرجاً بحجم خطوة صغير .فيما يلي المخطط الانسياني لهذه الخوارزمية[11,9].



الشكل(2) مخطط انسيابي لخوارزمية التدريب مع خوارزمية Levenberg - Marquardt

4- دوال بيســـــــل

دوال بيسل عبارة عن الحلول المستقلة خطياً لمعادلة بيسل التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n التي تأخذ الشكل الاتي :

$$X^2\frac{d^2y}{dz^2} + X\frac{dy}{dz} + (X^2 - n^2)y = 0 \qquad (6)$$

على الرغم من أن معادلة بيسل (6) تكون معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية بناءً على التفاضلات المتعلقة بها فيسمون المعادلة تسمية الدليل، وليس بأعلى رتبة تفاضلية فيها فنقول معادلة بيسل ذات الدليل n حيث n (رتبة دالة بيسل) عدد أختياري حقيقي أو مركب.كان العالم الرياضي دانييل برنولي أول من أعطى مفهوم دالة بيسل في سنة (1732) إذ استخدم الدالة من الرتبة الصفرية حلاً لمسألة تذبذب سلسلة معلقة من طرف واحد [13,12]. ودرسها أيضاً ليونارد داويلر (1783–1703) في تحليله لذبذبات الغشاء، ثم بعد ذلك قدم العالم الفرنسي الفلكي والرياضي ويليم بيسل (1846–1784) تعميم هذه المعادلة بعد أن واجهته في دراسته لحركة الكواكب والذي اكتشفها عندما كان يحاول صياغة مسألة في الحركة الكوكبية، وتظهر ايضا في اهتزازات السلاسل والاغشية الدائرية وانتشار التيار الكهربائي في النواقل الاسطوانية وغيرها من مسائل الرياضيات التطبيقية. تعرف دوال بيسل أيضاً بدوال الاسطوانة أو التوافقيات الاسطوانية وذلك لانها تمثل الحل لمعادلة لابلاس في الاحداثيات الاسطوانية والكروية [16–19]. لذا سميت هذه الدوال بدوال بيسل نسبة للعالم الألماني بيسل وهو عالم أضاف الكثير إلى علوم الفلك والمنحنيات على السطوح وميكانيكا الكون وكان أول من قدم تحليلاً منظماً للحلول المعروفة بدوال بيسل للمعادلة التي تحمل اسمه والحل العام للمعادلة (6) هو :

$$Y = \mathrm{c1}\, J_{\mathrm{n}}(x) + \mathrm{c2}\, J_{-\mathrm{n}}(x) \qquad (7)$$

حيث J_{n}هي دالة بيسل من النوع الأول،$J_{-\mathrm{n}}(x)$ هي دالة بيسل من النوع الثاني وهما مستقلان خطياً وإنc_1،c_2 ثوابت اختيارية[13, 14]. لدوال بيسل أهمية كبيرة؛ خصوصاً ونحن نتعامل معها في كثير من الأحيان مثل ما نتعامل مع الدوال المثلثية، كما أن الكثير من التكاملات يمكن الحصول على قيمتها بواسطة دوال بيسل. نجد في اجراء صياغة بعض المسائل التطبيقية العديد من المعادلات التفاضلية المهمة تقود إلى دوال خاصة تسمى بأسماء مكتشفيها.تكمن اهمية دوال بيسل الثلاث الرئيسية في تطبيقاتها في المسائل الرياضية والفيزيائية والكيميائية والهيدروديناميكا والهندسة الإلكترونية والميكانيكا وفي مختلف العلوم الأخرى. كما إن لدوال بيسل أهمية كبرى حيث أنها تظهر كحلول لمعادلات تفاضلية تعرف باسم معادلات يبسل التفاضلية التي نجدها في الكثير من المسائل الرياضية والفيزيائية المختلفة وبصورة خاصة في المسائل التي تتضمن أشكالا دائرية لتحديد توزيع الحرارة في قرص دائري وكذلك في حلول معادلة الموجة ومسائل القيم الحدية وغيرها[20]، تظهر معادلة بيسل عند الحاجة لحلول معادلة لابلاس ومعادلة هلمهولتز في الإحداثيات الأسطوانية أو الإحداثيات الكروية. لذا فإن لدوال بيسل ذات أهمية وخاصة في مسائل انتشار الموجات، مسائل سريان الموائع، مسائل سريان الحرارة، مسائل سريان الكهرباء،حركة الموجات الكهرومغناطيسية ومجال الجاذبية. ومن تطبيقاتها الهامة ومنها موجات كهرومغناطيسية في دليل الموجة الاسطواني، قانون توصيل الحرارة في جسم اسطواني، انماط التذبذب في جسم دائري (حلقي) غشاء صناعي، مسائل الأنتشارعلى شكل شبكي، حلول معادلة شرودنجر(في الاحداثيات الكروية) لجسم طليق، الاهتزازات البسيطة لخيط مرن، تكثف التيار الكهربائي على السطوح الجانبية لنواقل اسطوانية.الجهد الكهروستاتيكي بأسطوانة جوفاء، الجزء الشعاعي من معادلة هلمهولتز في الإحداثيات الكروية، الموجات المستوية والكروية في الإحداثيات الأسطوانية، معادلة الموجة في الصورة القطبية، تدفق السوائل، معادلة التوصيل الحراري، الذبذبات (الاهتزازات)، ذبذبات غشاء الدائري والموجات الموقوفة له، الضغط في التحميل، وهناك تطبيقات أخرى لدوال بيسل كما في معالجة الإشارة (مثل اصطناع الإف إم ، نافذة كإيسر ، مرشح بيسل) [19،20].

5– دوال بيســـل الثلاث الرئيسية

دوال بيسل من النوع الأول **Bessel Functions of the First kind**

تعرف دالة بيسل من النوع الأول التي يرمز لها $J_{\mathrm{n}}(x)$ ذات الرتبة n علي انها الحل الأول الناتج من استخدام طريقة متسلسلات القوي لحل معادلة بيسل التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n،والتي عرفت في المعادلة (7) وتعرف دالة بيسل من النوع الأول بدلالة متسلسلة ما كلورين

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\mathrm{n}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{4}\right)^k}{k!\,\Gamma(n+k+1)} \qquad (8)$$

حيث *الرمز* **Γ** يرمز لدالة جاما (**Gamaa Function**)

للقيم الغير صحيحة n، تكون الدوال J_n، J_{-n} مستقلة خطيا، وتكون بالتالي الحلين العامين للمعادلة التفاضلية.هذا يعني أن الحلين لم يعودا مستقلين خطياً، في هذه الحالة يكون الحل الأخر المستقل خطياً يكون دوال بيسل من النوع الثاني[13-20،15].

دوال بيسل من النوع الثاني Bessel Functions of the Second kind

بما أن معادلة بيسل هي معادلة تفاضلية من المرتبة الثانية، فينبغي أن تمتلك حلين مستقلين، انه إذا كان n عدد غير صحيح، فإن المعادلة (6) تمتلك حلين مستقلين خطياً هما $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ ، إما إذا كان n مساوياً عددا صحيحا فإن التابعين $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ مترابطان خطيا، ومن ثم فهما يمثلان حلا واحد. تعرف دالة بيسل من النوع الأول التي يرمز لها $Y_{\mathrm{n}}(x)$ ذات الرتبة n علي انها الحل الثاني الناتج من استخدام طريقة متسلسلات القوي لحل معادلة بيسل التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة n،والتي عرفت في المعادلة (6) وتعرف دالة بيسل من النوع الأول بدلالة متسلسلة ما كلورين في الصورة التالية. فتسمى دوال بيسل من النوع الثاني ذات الدليل n دوال نيومان**(Neumen Functions)** يرمز لها بالرمز $N_n(\mathrm{x})$، تعرف دالة نيومان كمايلي : [1-4]

$$\mathrm{N_n}(x) = \frac{J_{\mathrm{n}}(x)\cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} \qquad (9)$$

نسمى هذا الحل الثاني والذي هو مستقل خطياًعن $J_n(x)$ عندما يكون عدداً صحيحاً أو غير صحيح بدالة بيسل من النوع الثاني ذات الرتبة n محتفظين بدالة بيسل من النوع الأول ذات الرتبة n للدالة $J_n(x)$ ويكون بذلك الحل العام للمعادلة (6) هو

$$Y = \mathrm{c1}J_{\mathrm{n}}(x) + \mathrm{c2}\,N_{\mathrm{n}}(x)$$

كتركيب خطي معين للحلين $J_n(x)$ و $J_{-n}(x)$ ، يدعى التابع الناتج بهذا الشكل بتابع نيومان $N_n(\mathrm{x})$ وبتابع بيسل من النوع الثاني كما هو في معادلة (9) فمن الواضح، إذا كان غير صحيح، أن $N_n(\mathrm{x})$ هو حل لمعادلة بيسل، ذلك أنه عبارة عن تركيب خطي لحلين معلومين لها مستقلين خطيا عن بعضهما، اما عندما يكون مساويا عددا صحيحا فإن العلاقة تغدو غير محددة .فالميزة الموجبة لدالة بسل تشبه كثيراً في الشكل موجات الماء والتي يمكن أن تولد على سبيل المثال بأسقاط حجارة في وسط بركة كبيرة مملوءة بالماء. بالفعل ثبت ظهور شكل هذه الموجات التي لها شكل دوال بسل في نظرية الموائع.[17-21،20،19]

دوال بيسل من النوع الثالث Bessel Functions of The Third Kind

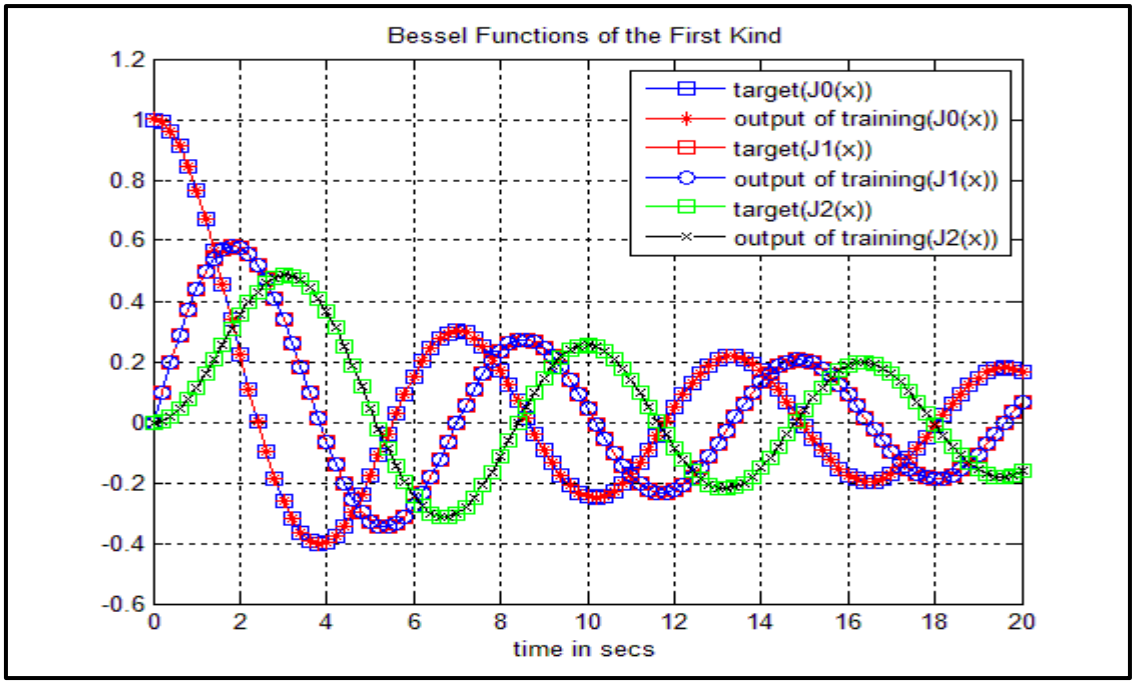
توجد من بين الحلول العامة لمعادلة بيسل حلول خاصة مفيدة جداً في التطبيقات، نذكر من بين هذه الحلول الخاصة توابع هانكل من الصنفين الأول والثاني فتسمى دوال بيسل من النوع الثالث بدوال هانكل(**Hankel Functions**) وتعرف بالشكل التالي :

$$H_{\mathrm{n}}^{(1)}(x) = J_{\mathrm{n}}(x) + i\mathrm{N_n}(x)$$
$$H_{\mathrm{n}}^{(2)}(x) = J_{\mathrm{n}}(x) - i\mathrm{N_n}(x) \qquad (10)$$

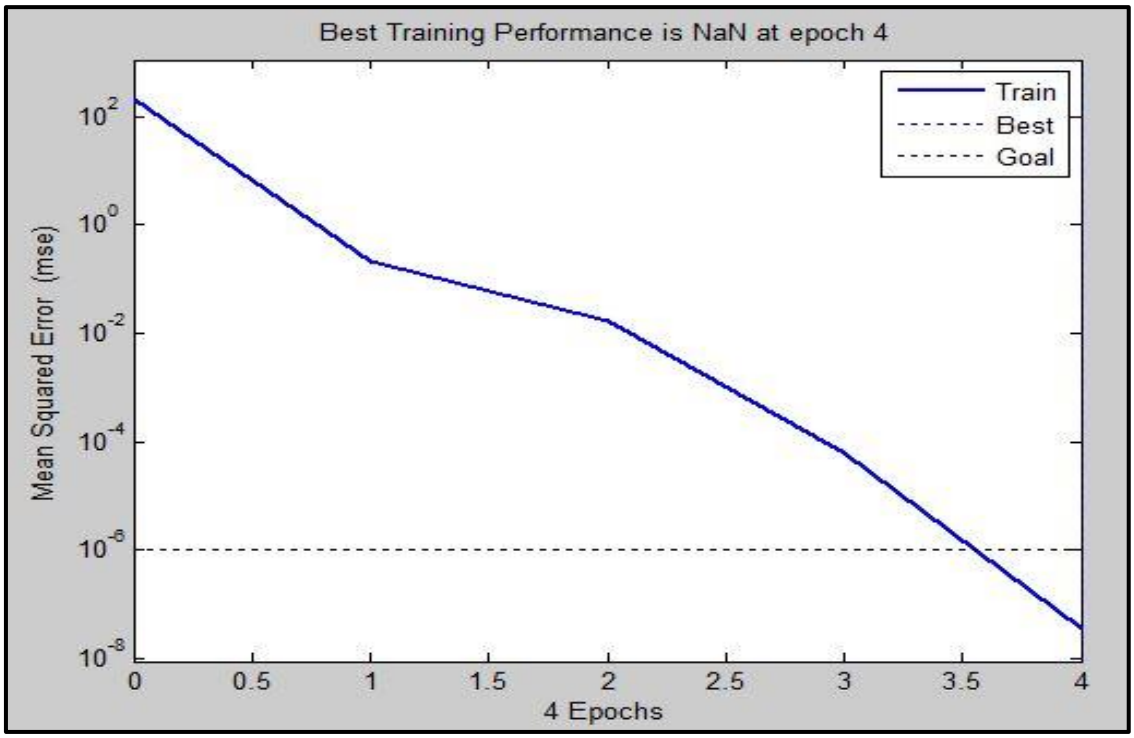
حيث $H_{\mathrm{n}}^{(1)}$ ، $H_{\mathrm{n}}^{(2)}$ هي دوال هانكل من النوع الأول والثاني على التوالي. نشير إلى أن توابع هانكل شأنها شأن توابع نيومان، تؤول إلى اللانهاية عند $x \to 0$ [17،19،20].

6- نتائج تدريب الخوارزمية

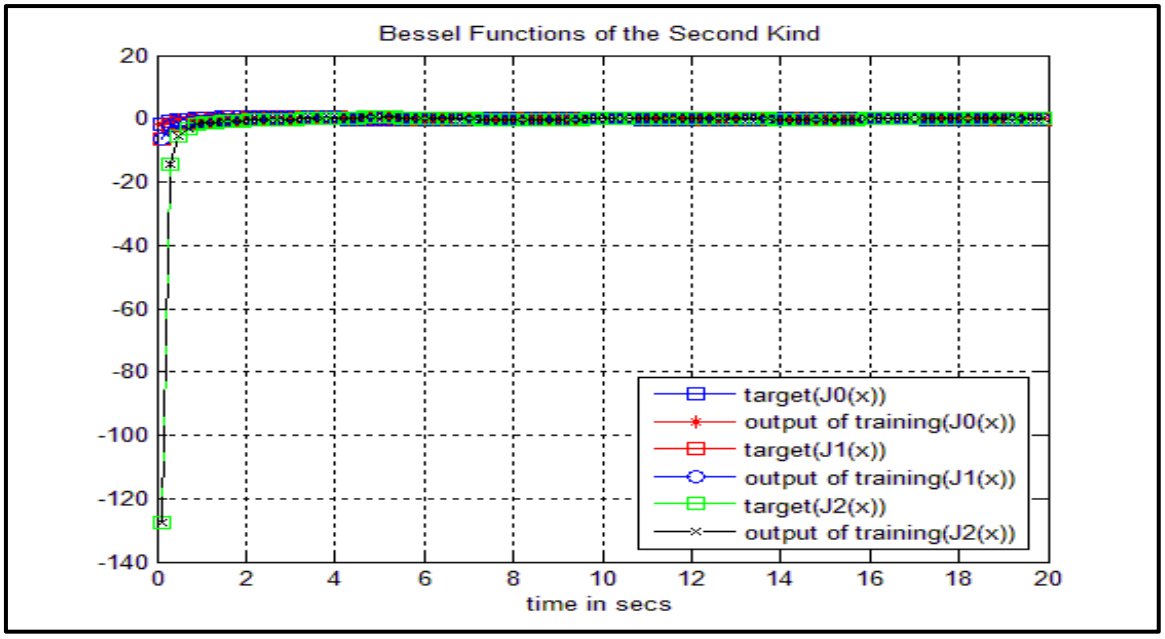
في هذا الجزء من البحث نقوم بمحاكاة لتدريب الشبكة العصبية الاصطناعية ومقارنة مع نتائج المضبوطة لدوال بيسل بانواعها الثلاثة، وكما موضح في الرسومات (3-8) حيث ان الرسم (3،5،7) يوضح المقارنة بين نتائج المضبوطة للدوال بيسل الثلاثة ونتائج تدريب الشبكة العصبية الاصطناعية، والرسومات (4،6،8) يوضح معدل مربع الخطأ الناتج عن تدريب الشبكة العصبية الاصطناعية، وقد تمت برمجة المسائل باستخدام برنامج ماتلاب2020، وبأخذ مقياس للخطأ 10^{-7}، وفيما يلي اشكال ماخوذة لتدريب الشبكة العصبية مع النتائج العملية.فالشكل البياني التالي يوضح مخطط دالة بيسل من النوع الأول J_{n} لرتب صحيحة.... $n = 0،1، 2$



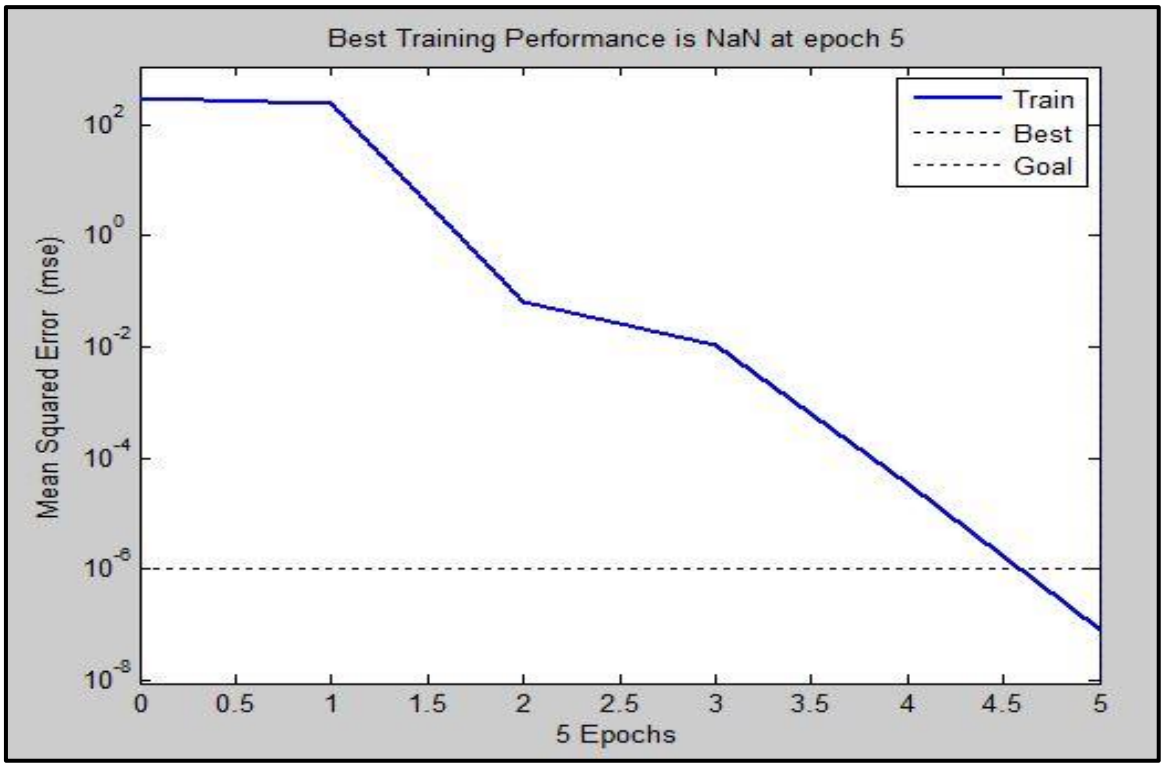
الشكل (3) مقارنة نتائج دالة بيسل من النوع الأول مع نتائج تدريب الشبكة العصبية الاصطناعية



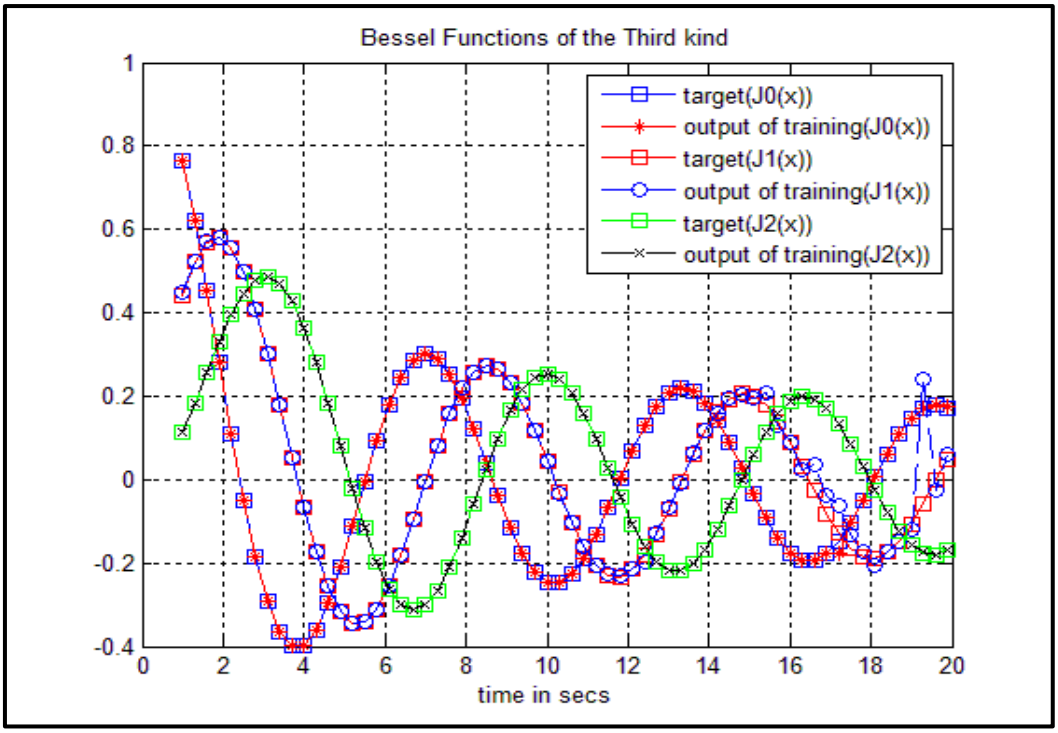
الشكل (4) معدل مربع الخطأ لتدريب الشبكةالعصبية الاصطناعية



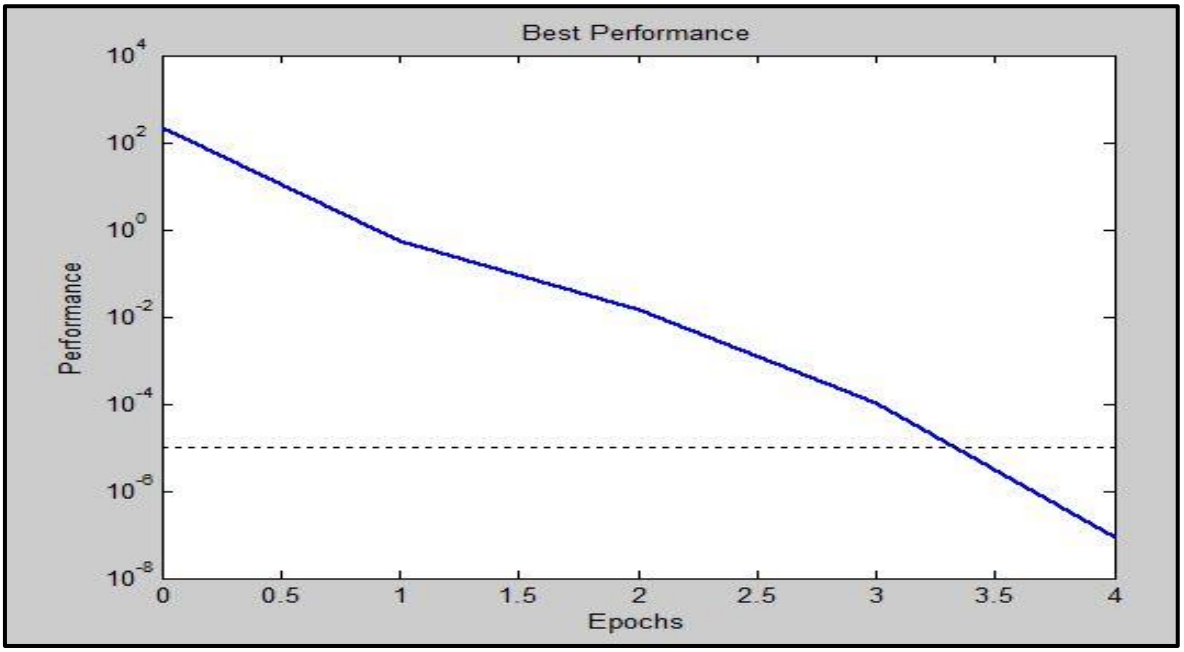
الشكل (5) مقارنة نتائج دالة بيسل من النوع الثاني مع نتائج تدريب الشبكة العصبية الاصطناعية



الشكل(6) معدل مربع الخطأ لتدريب الشبكةالعصبية الاصطناعية



الشكل (7) مقارنة نتائج دالة بيسل من النوع الأول مع نتائج تدريب الشبكة العصبية الاصطناعية



الشكل (8) معدل مربع الخطأ لتدريب الشبكةالعصبية الاصطناعية

7-الاستنتاجات والتوصيات المستقبلية

نستنتج من النتائج العملية ان الشبكات العصبية الاصطناعية ذات التغذية الامامية لها القدرة على تقريب دوال بيسل ودوال أخرى ايضاً بشكل دقيق وبكفاءة عالية ممكن يمكن الباحثين من تطوير الشبكات العصبية الاصطناعية واستخدام خوارزميات أخرى ايضاً لتدريب الشبكة العصبية للحصول على نتائج افضل.

المصادر والمراجع.

[1] Y. A. Laylani, K. K. Abbo, and H. M. Khudhur, "Training feed forward neural network with modified Fletcher-Reeves method," *Journal of Multidisciplinary Modeling and Optimization*, vol. 1, no. 1, pp. 14-22, 2018.

[2] K. Abbo and M. Hind, "Improving the learning rate of the Backpropagation Algorithm Aitken process'," *Iraqi Journal of the statistical sciences, accepted (to appear)*, 2012.

[3] قدسي لميس، شيحا بلال، استخدام الشبكات العصبونية الاصطناعية لإزالة الضجيج من إشارة الكلام، مجلة **جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية،المجلد28،العدد2006،2.**

[4] D. Nguyen and B. Widrow, "Improving the learning speed of 2-layer neural networks by choosing initial values of the adaptive weights," in *IJCNN. International Joint Conference on Neural Networks*, 1990, pp. 21-26: IEEE.

[5] عسيكرية عزيز، نمذجة عكارة مياه شرب محطة السن باستخدام شبكات عصبونية ديناميكية، **جامعة تشرين للدراسات و البحوث العلمية،المجلد 40،العدد4**،ص187.

[6] فادي،فاتن، تطوير نظام تشخيص أنواع ورم الدماغ في صورالرنين المغناطيسي باستخدام الخرائط ذاتية التنظيم، **مجلة جامعة دمشق للعلوم الهندسية ، المجلد37،العدد1، ص106 .**

[7] لطفي رانيا،طويلة روعة، استخدام الشبكات العصبونية للكشف عن التطبيقات الخبيثة في نظام أندوريد،مجلة جامعة البعث، المجلد 43،العدد10،ص148،123.

[8] H. M. Khudhur and K. K. Abbo, "New hybrid of Conjugate Gradient Technique for Solving Fuzzy Nonlinear Equations," *Journal of Soft Computing and Artificial Intelligence*, vol. 2, no. 1, pp. 1-8, 2021.

[9] H. M. Khudhur, "Numerical and analytical study of some descent algorithms to solve unconstrained Optimization problems," in *University of Mosul college Computer Sciences and Mathematics Department of Mathematics Iraq*, ed, 2015, pp. 83-83.

[10] N. Ampazis and S. J. Perantonis, "Levenberg-Marquardt algorithm with adaptive momentum for the efficient training of feedforward networks," in *Proceedings of the IEEE-INNS-ENNS International Joint Conference on Neural Networks. IJCNN 2000. Neural Computing: New Challenges and Perspectives for the New Millennium*, 2000, vol. 1, pp. 126-131: IEEE.

[11] A. J. T. o. L. a. Ranganathan, "The levenberg-marquardt algorithm," vol. 11, no. 1, pp. 101-110, 2004.

[12] H. M. Khudhur and K. K. Abbo, "A New Type of Conjugate Gradient Technique for Solving Fuzzy Nonlinear Algebraic Equations," in *Journal of Physics: Conference Series*, 2021, vol. 1879: {IOP} Publishing.

[13] E. D. Rainville, *Special functions*. New York, 1960.

[14] I. Gradshteyn, "S and Ryzhik IM 1965 Table of Integrals, Series and Products," ed: Academic Press, 1962.

[15] W. Bell, "Special Functions For Scientists And Engineers, Published simultaneously in Canada by D," ed: Van Nostrand Company,(Canada), Ltd, 1967.

[16] N. N. Lebedev, R. A. Silverman, and D. J. P. T. Livhtenberg, "Special functions and their applications," vol. 18, no. 12, p. 70, 1965.

[17] S. J. J. o. m. o. Chávez-Cerda, "A new approach to Bessel beams," vol. 46, no. 6, pp. 923-930, 1999.

[18] B. G. e. Korenev, *Bessel functions and their applications*. CRC Press, 2002.

[19] T. Nakamura, H. Ezawa, K. Watanabe, and F. W. J. J. o. t. P. S. o. J. WIEGEL, "A Treatise on the Theory of Bessel Functions A Treatise on the Theory of Bessel Functions, 1944," vol. 73, no. 4, pp. 843-854, 2004.

[20] موسى، عبدالله، الدوال الخاصة، ص181،162،161، مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع، 2011.

[21] الدرويش، نجوى، المستيري، فتح الله، دراسة لدوال بيسل بأنواعها الثلاثة الرئيسية تمثيلها وبعض خواصها و تطبيقاتها، رسالة ماجستير، ص1998،78،26،14.