استخدام تحويلات لا بلاس في حل المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها الفيزيائية

نجية محمد البشير

NajiaMohamed1@gmail.com

القسم العام– كلية التقنية الهندسية –جنزور

ملخص:

يقدم هذا البحث دراسة عن استخدام تحويلات لا بلاس في حل المعادلات التفاضلية كأحد أهم التحويلات التكاملية التي تساعد في حل مسائل القيمة الابتدائية المعطاة بمعادلات تفاضلية خطية ذات معاملات ثابته باستخدام خطوات حل أقل من الطريقة الجبرية مما يساعد في تقليل نسبة الخطأ. والمساعدة في فهم كثير من الظواهر المعقدة واستخدامها في العديد من التطبيقات في الفيزياء والهندسة والإحصاء. حيث تم توضيح المفاهيم الأساسية لتحويلات لا بلاس وتحويلات لا بلاس العكسية بشكل مختصر، واستخدام تطبيقاتها في حل المعادلات التفاضلية وخاصة التطبيقات الفيزيائية منها وذلك بإيجاد حل معادلة الهزاز التوافقي المكون من كتلة واحدة والمتذبذب المكون من نظام من الكتل، وأيضا إيجاد حل المعادلات التفاضلية للدوائر الكهربية وصياغة المعادلات الحاكمة لهذه التطبيقات كدالة في المجال الترددي ثم استخدام تحويل لا بلاس العكسي باستخدام برنامج Mathcad لإيجاد الحل النهائي في المجال الزمني.

الكلمات المفتاحية (Key words):

تحويل لابلاس Laplace Transform، تحويل لا بلاس العكسي Invers Laplace Transform ، معادلة تفاضلية Differential Equation .

Abstract:

This research presents a study on the use of Laplace transforms in solving differential equations as one of the most important integral transformations, which has many applications in physics, engineering and statistics. Solve the equation of the harmonic oscillator consisting of a single mass , oscillator consisting of a system of blocks, and also finding the solution to the differential equations of electric circuits and formulating the governing equations for these applications as a function of the frequency domain and then using the inverse Laplace transform using Mathcad software to find the final solution in the time domain.

مقدمة:

يعد استخدام تحويلات لا بلاس طريقة شائعة لحل أنظمة المعادلات التفاضلية الخطية وبشروط أولية. و مثل هذه الأنظمة تحدث بشكل متكرر في نظرية التحكم و تصميم الدوائر والتطبيقات الهندسية الأخرى[1,2,3]، ومازالت المعادلات التفاضلية تستخدم في فهم العلوم الفيزيائية و الهندسية [4,5]. بالإضافة إلى مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي ويمتد تأثيرها ليشمل العديد من العلوم مثل العلوم الطبية والاقتصادية والحيوية. حيث أن أغلب

القوانين التي تحكم بين متغيراتها تكون عادة على شكل معادلة تفاضلية. ولفهم ودراسة هذه القوانين والمسائل لا بد من حل المعادلات التفاضلية واستخدم لذلك تحويل لا بلاس والذي يمثل أحد الطرق لحل هذه المعادلات.

وتحويل لا بلاس هو عملية تجرى على أي دالة رياضية وتحولها من مجال لأخر وعادة يكون هذا التحويل من مجال الزمن إلى مجال التردد ويحولها إلى معادلات جبرية يسهل التعامل معها[6,7,8] .

و بصفه عامه هو أداة لتبسيط الدالة من شكلها الاصلي إلي شكل أخر أبسط منه عن طريق تأثيره التكاملي علي الدالة وتحويلها إلي داله أخري مختلفة تماماً عن الدالة الأصلية حيث يتم تحويل المتغير المستقل للدالة إلي متغير أخر و بالتالي يغير نطاق و مدى الدالة الأصلية، وتعتمد تحويلات لا بلاس اعتماداً كليا علي التكامل أي ان هذا التحويل معرف كتكامل علي المدى من الصفر إلي ما لانهاية، ويكون فعالاً بوجه خاص في حل مسائل القيم الابتدائية المحتوية علي معادلات تفاضلية خطية بمعاملات ثابتة، والميزة الرئيسية لاستخدام تحويلات لا بلاس هي أن حل المعادلات التفاضلية يختزل إلى الجبر بمعالجة التحويل الأول من المجال الزمني إلى مجال لا بلاس. و يمكن فك ارتباط حل مجال لا بلاس بالعودة إلى المجال الزمني بواسطة تحويل لا بلاس العكسي[8,9].

1- تحويلة لابلاس Laplace Transform:

هي تحويل من المجال الزمني (t) إلى المجال المركب (S) حيث S=α+iβ

$$\mathscr{L}(f(t)) = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t)dt = F(s) \qquad (1)$$

جدول (1) بعض تحويلات لا بلاس الأساسية

$f(t)$	$F(s)$
K	$\mathscr{L}(k) = \int_0^\infty ke^{-st}dt = \frac{K}{S} \quad : k \in \mathbb{R}$
$\sin at$	$\mathscr{L}(\sin at) = \int_0^t e^{-t}\sin(at)dt \quad = \frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos at$	$\mathscr{L}(\cos at) = \int_0^t e^{-t}\cos(at)dt = \frac{s}{s^2+a^2}$
t^n	$\mathscr{L}(t^n) = \int_0^\infty t^n e^{-st}dt = \frac{n!}{s^{n+1}}$
e^{at}	$\mathscr{L}(e^{at}) = \int_0^\infty e^{at}\cdot e^{-st}dt = \frac{1}{s-1}$
$e^{at}f(t)$	$\mathscr{L}(e^{at}f(t)) \int_0^\infty e^{-st}\cdot e^{at}f(t)dt = F(s-a)$
$t^n f(t)$	$\mathscr{L}(t^n f(t)) = \int_0^\infty e^{-st}t^n f(t)dt = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n}(F(s))$

2- تحويلات لا بلاس للتفاضل (Laplace Transform For Derivative):

نفرض أنه لدينا $f(t)$ دالة متصلة من المرتبة الأسية e^{at} ، ولها مشتقة $f'(t)$ متقطعة الاتصال ، فإن تحويل لا بلاس للمشتقة هو $\mathscr{L}(f'(t))$ وتكون له قيمة عندما $s > a$ بحيث أن:

$$\mathscr{L}\left(f^{'}(t)\right) = s\mathscr{L}\left(f(t)\right) - f(0) \tag{2}$$

ويتم الحصول على المعادلة (1) باستخدام التكامل بالتجزئة كالآتي:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(f^{'}(t)\right) &= \int_0^\infty e^{-st} f^{'}(t)dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} d\left(f(t)\right) \\ &= e^{-st} f(t)_{t-0}^{t=\infty} + s\int_0^\infty e^{-st}\,\mathrm{f}(t)dt \\ &= -f(0) + s\,\mathscr{L}(f(t) \qquad (3)\end{aligned}$$

ويمكن حساب تحويل لا بلاس للمشتقة ولمرتبة أعلى:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(f^{''}(t)\right) &= s\mathscr{L}\left(f^{'}(t)\right) - f^{'}(0) \\ &= s\left[s\mathscr{L}\left(f(t)\right) - f(0)\right] - f^{'}(0)\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}\left(f^{''}(t)\right) = s^2\mathscr{L}\left(f(t)\right) - sf(0) - f^{'}(0) \tag{4}$$

$$\mathscr{L}\left(f^{'''}\right) = s^3\,\mathrm{F(s)} - s^2\mathrm{f}(0) - sf^{'}(0) - f^{''}(0) \tag{5}$$

وبصورة عامة يكون تحويل لا بلاس للمشتقة كالآتي:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\left(f^n(t)\right) = \; & s^n\mathscr{L}\left(f(t)\right) - s^{n-1}\mathrm{f}(0) - s^{n-2}f^{'}(0) - s^{n-3}f^{''}(0) - \cdots\cdots \\ & -f^{(n-1)}(0) \qquad (6)\end{aligned}$$

$$\mathscr{L}\left(f^n(t)\right) = s^n\,\mathrm{F(s)} - s^{n-1}\mathrm{f}(0) - s^{n-2}f^{'}(0) - s^{n-3}f^{''}(0)\ldots\ldots..f^{(n-1)}(0)$$

وتستخدم هذه الصيغة لإيجاد حل المعادلات التفاضلية من الرتب العليا.

3- تحويلات لا بلاس العكسية Invers Laplace Transform:

هي تحويلة من المجال المركب s إلى المجال الحقيقي في الزمن(t). وفي هذا البحث تم إيجاد تحويلات لابلاس العكسية باستخدام الحاسوب لتوفير الوقت بدلاً عن الطرق التقليدية .

4-تطبيقات تحويلات لا بلاس :Applications Of Laplace Transform

أولاً التطبيقات الميكانيكية :Mechanical Applications

a- حل المعادلات التفاضلية العادية (ODE) باستخدام الدوال المجزئة piecewise function ، step function:

حيث piecewise functions هي دوال تقابل جزء من مدى محدد ومعرفة بدالتين أو أكثر عند مدى محدد بينما الدالة الدرجية أو دالة الخطوة (step function) هي دالة يعبر عنها بواسطة الpiecewise function وتكون دالة لأكبر عدد صحيح.

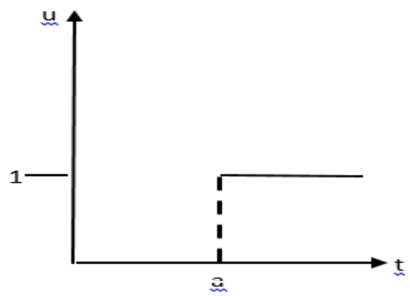
فعند حل معادلات تفاضلية عادية (ODE) على الصورة:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots\cdots + a_1 x' + a_0 x = f(t) \qquad (7)$$

و $f(t)$ تمثل العديد من الدوال المعرفة والتي نحتاج لتغييرها إلى تركيبة في الدوال الدرجية $u_a(t)$ (step function) حيث:

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0 & if \quad t < a \\ 1 & if \quad t \geq a \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0 & if \quad t < 0 \\ 1 & if \quad t \geq 0 \end{cases}$$



الشكل (1) دالة الخطوة الواحدة

ودالة الخطوة الواحدة(Unit Step Function) والتي تسمي Heaviside function أو دالة الوحدة الدرجية ($Unit\ step\ function$) سيتم استخدامها لحل المعادلة التفاضلية للحركة التوافقية البسيطة (Harmonic Oscillator Equation) والتي تكتب بالصورة الآتية:

$$m\,x'' + kx = f(t) \qquad (8)$$

وإذا كان $m = 1, \quad k = 4 \quad , \quad x(0) = o\,, \;\; x'(0) = -1$

فإن $x'' + 4x = f(t)$

$$f(t) = \begin{cases} \cos(2t) & if \;\; 0 \leq t < \pi \\ 0 & if \quad t \geq \pi \end{cases} \qquad (9)$$

نوجد أولا تعبير للدالة f(t) كتركيبة خطية لدالة درجية (step function) كالآتي:

$f(t) = \cos(2t)\,(u(t) - u_{2\pi}(t))$ ثم نطبق تحويل لابلاس لطرفي المعادلة فنحصل على:

$$(s^2+4)X(s) = -1 + (1 - e^{-\pi s})\frac{s}{(s^2+4)}$$

$$\therefore X(s) = \frac{-1}{s^2+4} + (1 - e^{-\pi s})\;\frac{s}{s^2+4}$$

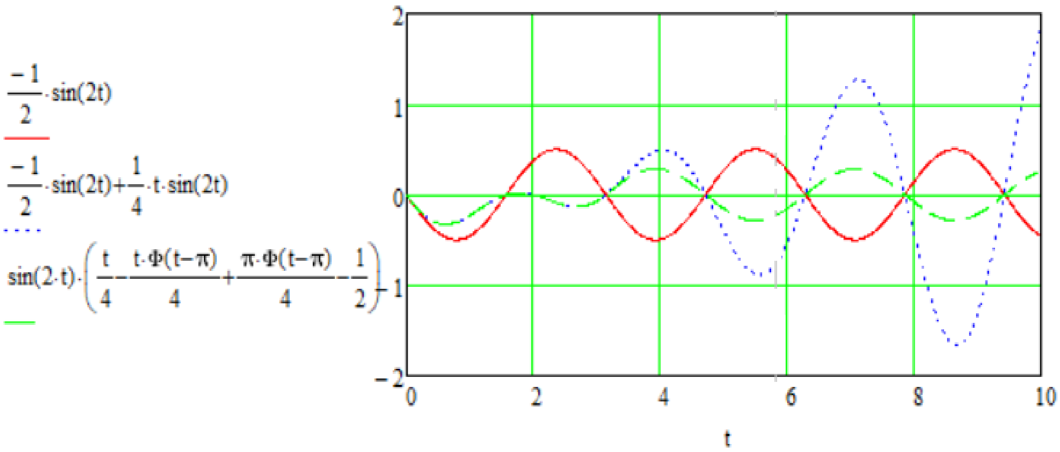
وباستخدام Mathcad نوجد تحويل لا بلاس العكسي فنحصل على:

حيث الدالة $\emptyset$ في حل الحاسوب تمثل دالة (Heaviside function) والتي قيمتها إما 0 أو 1. وطبقا للمدي المبين للدالة f(t) في (9) فإن:

$$x(t) := \left[\left(\frac{-1}{s^2+4}\right) + \left(1-e^{-\pi \cdot s}\right) \cdot \frac{s}{\left(s^2+4\right)^2}\right] \text{invlaplace} \rightarrow \sin(2 \cdot t) \cdot \left(\frac{t}{4} - \frac{t \cdot \Phi(t-\pi)}{4} + \frac{\pi \cdot \Phi(t-\pi)}{4} - \frac{1}{2}\right)$$

$$x(t) = \begin{cases} \frac{-1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{4}\sin(2t) & if\ \ 0 \le t < \pi \\ 0 \quad if & \frac{\pi-2}{4}\sin(2t) \ \ge \ \pi \end{cases} \qquad (10)$$

المعادلة $x'' + 4x = f(t)$ تمثل نموذج لنظام متذبذب مكون من نابض واحد إحدى نهايتيه ثابتة والنهاية الأخرى مثبت بها جسم كتلته الوحدة وثابت هوك $k = 4$ ، ومطبق عليه قوة مقدارها $cos(2t)$ عند اللحظة الابتدائية π لوحدة الزمن فيمكن تمثيل الشكل البياني بإدخال هذه الحلول للمعادلة ومقارنتها لقيم مختلفة من $f(t)$.



الشكل(2) مقارنة لحلول معادلة الهزاز التوافقي .

و يوضح الحلول لثلاث حالات وهي:

1- الحالة التي لا توجد فيها قوة خارجية مطبقة (المنحنى الأحمر).

2- الحالة التي يتم فيها تطبيق قوة خارجية باستمرار مقدارها $\cos(2t)$ مبينة (بالمنحنى الأزرق).

3- تطبيق قوة مقدارها $\cos(2t)$ عند اللحظة الزمنية (π) ثانية (المنحنى الأخضر).

b- تطبيقات لابلاس لنظام كتل معلقة بنابض(Mass- spring system):

الشكل الآتي يوضح الإزاحات y_1 و y_2 من موضع الاتزان الساكن وفي الاتجاه الموجب لأسفل مع إهمال كتل النوابض نفسها. وعند تطبيق قوى خارجية $f_1(t)$ ، $f_2(t)$ على الكتل m_1 ، m_2 على التوالي تكون معادلات الحركة كالاتي:

$$m_1 y_1'' = -k_1 y_1 + k_2 (y_2 - y_1) + f_1(t) \qquad (11)$$

$$m_2 y_2'' = -k_2 (y_2 - y_1) - k_3 y_2 + +f_2(t) \qquad (12)$$

وهذا النظام هو نظام معادلات تفاضلية من الرتبة الثانية

يمكن حله باستخدام تحويلات لابلاس. حيث نعتبر أولاً أن:

$$m_1 = 4\ ,\ m_2 = 2\ , k_1 = 2\ ، k_2 = 2\ , k_3 = 1$$

$$y_1(0) = y_1'(0) = y_2(0) = y_2'(0) = 0$$

$$f_1(t) = 1 \quad ، f_2(t) = 0$$

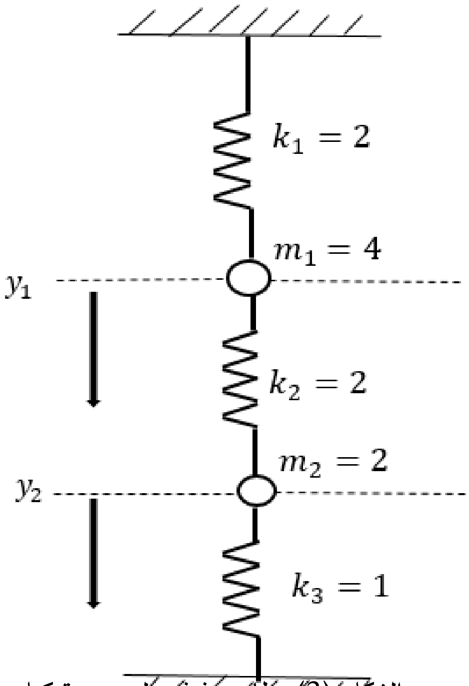
$$\therefore 4 y_1'' = -2 y_1 + 2(y_2 - y_1) + 1$$

$$2 y_2'' = -2(y_2 - y_1) - y_2$$

وبأخذ تحويل لا بلاس للمعادلتين نحصل على:

$$(4s^2 + 4)Y_1(s) - 2Y_2(s) = \frac{1}{s}$$

$$-2Y_1(s) + (2s^2 + 3)Y_2(s) = 0$$



الشكل (3) نظام متذبذب لمجموعة كتل

وبحل هاتين المعادلتين نحصل على:

$$Y_1(s) = \frac{2s^2 + 3}{s(8s^4 + 20s^2 + 8)} \qquad , \qquad Y_2(s) = \frac{1}{s(4s^4 + 10\, s^2 + 4)}$$

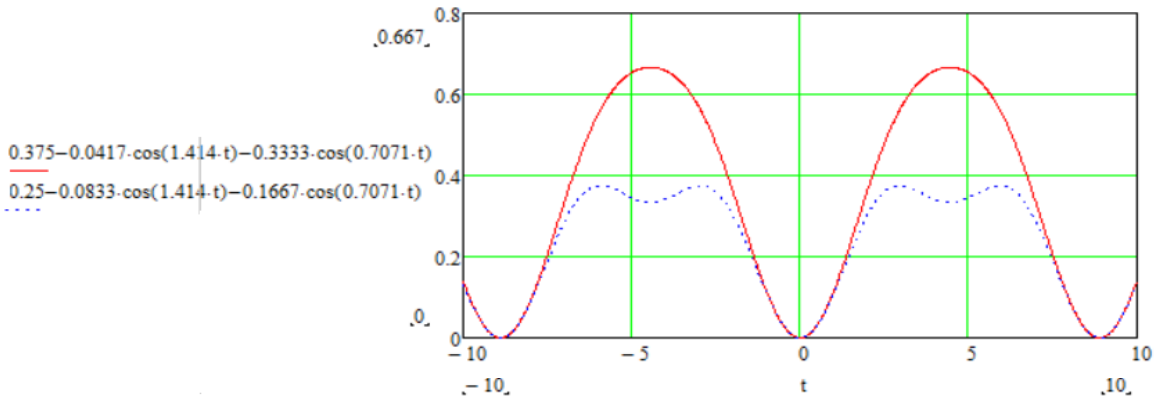
وباستخدام Mathcad نوجد تحويل لا بلاس العكسي:

$$y_1(t) := \frac{0.375}{s} - \frac{0.3333\cdot s}{s^2 + 0.5} - \frac{0.0417\cdot s}{s^2 + 2} \text{ invlaplace } \rightarrow 0.375 - 0.0417\cdot\cos(1.4142135623730950488\cdot t) - 0.3333\cdot\cos(0.70710678118654752440\cdot t)$$

$$\therefore y_1(t) = 0.375 - 0.33\cos(\sqrt{0.5})t - 0.0417cos(\sqrt{2})t \qquad (13)$$

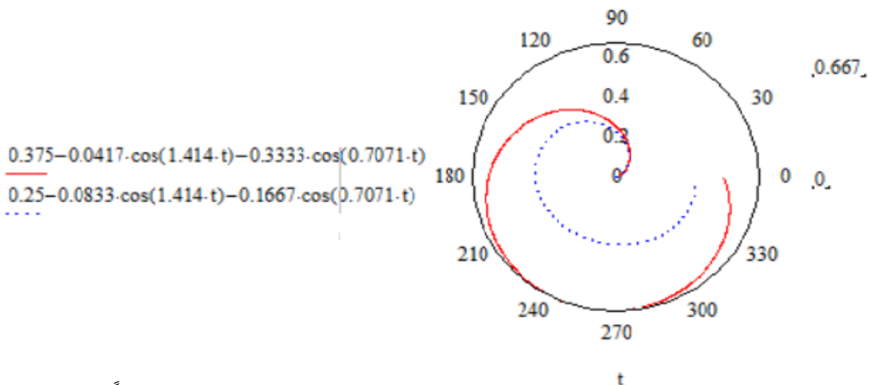
$$y_2(t) := \frac{0.25}{s} - \frac{0.1667\cdot s}{\left(s^2+0.5\right)} - \frac{0.0833\cdot s}{\left(s^2+2\right)} \text{ invlaplace } \rightarrow 0.25 - 0.0833\cdot\cos(1.4142135623730950488\cdot t) - 0.1667\cdot\cos(0.7071067811865475244\cdot t)$$

$$\therefore y_2(t) = 0.25 - 0.1667\cos(\sqrt{0.5})t - 0.0833os(\sqrt{2})t \qquad (14)$$



الشكل(4) مقارنة لحلول معادلات النظام المتذبذب عند تطبيق قوتين $f_1(t)$، $f_2(t)$.

حيث يمثل الحل للإزاحة $y_1(t)$ بالمنحنى الأحمر. بينما يمثل الحل لإزاحة $y_2(t)$ بالمنحنى الأزرق. وأيضا تم تمثيل هذه الحلول في النظام القطبي والذي وضح بالشكل التالي:



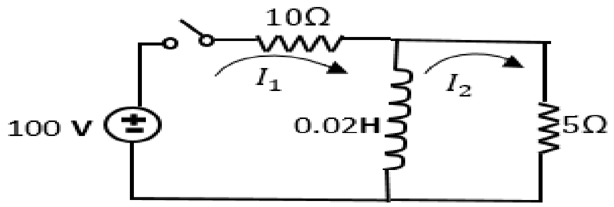
الشكل(5) مقارنة لحلول معادلات النظام المتذبذب عند تطبيق قوتين $f_1(t)$، $f_2(t)$ قطبياً.

5- تطبيقات لا بلاس للدوائر الكهربية

Applications In Electric Circuits :

a– شبكة كهربية مكونة من ملف محاثة ومقاومات:

نعتبر أنه لدينا الدائرة الموضحة بالشكل ونريد إيجاد التيار في كل جزء من الشبكة. وبتطبيق قانون كيرشوف للجهد في المسار الأول والمسار الثاني للشبكة فنحصل على:



الشكل(6) دائرة ملف ومقاومات

$$RI_1 + L\frac{dI_1}{dt} - L\frac{dI_2}{dt} = E(t) \Rightarrow 10I_1 + 0.02I_1' - 0.02I_2' = 100 \qquad (15)$$

$$L\frac{dI_2}{dt} + RI_2 - L\frac{dI_1}{dt} = 0 \Rightarrow 0.02I_2' + 5\,I_2 - 0.02I_1' = 0 \qquad (16)$$

بتطبيق تحويل لابلاس لطرفي المعادلتين نحصل على:

$$10\,\mathscr{L}(I_1) + 0.02s\mathscr{L}(I_1) - 0.02s\mathscr{L}(I_2) = \frac{100}{s}$$

$$\therefore \quad (10 + 0.02s)I_1(s) - 0.02sI_2(\mathrm{s}) = \frac{100}{s} \qquad (17)$$

$$0.02s\mathscr{L}(I_2) + 5\mathscr{L}(\,I_2) - 0.02s\mathscr{L}(I_1) = 0$$

$$(0.02s + 5)I_2(\mathrm{s}) - 0.02s\,I_1(s) = 0 \qquad (18)$$

ومن المعادلة (18) نجد أن:

$$I_2(\mathrm{s}) = I_1(s)\left(\frac{s}{s + 250}\right) \qquad (19)$$

ونعوض بها في المعادلة (17) نحصل على :

$$I_1(s) = 6.67\left[\frac{s + 250}{s(s + 166.7)}\right] = \frac{10}{s} - \frac{3.33}{s + 166.7} \qquad (20)$$

وباستخدام Mathcad نوجد تحويل لا بلاس العكسي:

$$I_1(t) := 6.67\cdot\left[\frac{s + 250}{s\cdot(s + 166.7)}\right] \text{invlaplace} \rightarrow 10.00299940011997o005 - 3.3329994001199760048\cdot e^{-166.7\cdot t}$$

نعوض بالمعادلة (20) في المعادلة (19) للحصول على:

$$I_2(s) = 6.67 \left[\frac{s}{s(s+166.7)}\right]$$

وباستخدام Mathcad نوجد تحويل لا بلاس العكسي:

$$I_2(t) := 6.67 \cdot \left[\frac{s}{s \cdot (s+166.7)}\right] \text{invlaplace} \rightarrow 6.67 \cdot e^{-166.7 \cdot t}$$

وعند تطبيق نظرية القيمة الابتدائية والقيمة النهائية نحصل على:

القيمة الابتدائية للتيار I_1 :

$$I_1(0) = \lim_{s\to\infty}[sI_1(s)] = \lim_{s\to\infty}\left[6.67\left[\frac{s+250}{(s+166.7)}\right]\right] = 6.67A \qquad (21)$$

والقيمة النهائية :

$$I_1(\infty) = \lim_{s\to 0}[sI_1(s)] = \lim_{s\to 0}\left[6.67\left[\frac{s+250}{(s+166.7)}\right]\right] = 10\ A \qquad (22)$$

القيمة الابتدائية والنهائية للتيار I_2 هي على التوالي كالآتي:

$$I_2(0) = \lim_{s\to\infty}[sI_2(s)] = \lim_{s\to\infty}\left[6.67\left[\frac{s}{(s+166.7)}\right]\right] = 6.67A \qquad (23)$$

$$I_2(\infty) = \lim_{s\to 0}[sI_2(s)] = \lim_{s\to 0}\left[6.67\left[\frac{s}{(s+166.7)}\right]\right] = 0 \qquad (24)$$

نلاحظ أن الملف يعطي معاوقة لانهائية عند لحظة غلق الدائرة وتكون التيارات:

$$I_1 = I_2 = \left(\frac{100}{10+5}\right) = 6.67A \qquad (25)$$

وبالتالي عند الحالة المستقرة فإن الملف يعمل كما لوكان دائرة قصر ويكون $I_1 = 10\ A$ ، $I_2 = 0$.

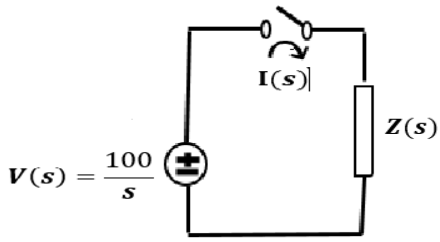
وأيضا يمكن إيجاد الدائرة المكافئة في مجال s حيث تكون معاوقة الملف $(0.02\ H)$ هي $Z(s) = 0.025$ وبالتالي فإن المعاوقة المكافئة للشبكة من ناحية المنبع هي :

$$\boldsymbol{Z(s)} = 10 + \left(\frac{(0.02\boldsymbol{s})(5)}{0.025\ \boldsymbol{s}+5}\right) = 15\left(\frac{\boldsymbol{s}+166.7}{\boldsymbol{s}+250}\right)$$

وتكون الدائرة المطابقة في مجال s موضحة في الشكل(7) و يكون التيار:

$$\boldsymbol{I_1(s)} = \frac{\boldsymbol{V}(s)}{\boldsymbol{Z}(s)} = \frac{100}{\boldsymbol{s}}\left[\frac{\boldsymbol{s}+250}{15(\boldsymbol{s}+166.7)}\right] = 6.67\left[\frac{\boldsymbol{s}+250}{\boldsymbol{s}(\boldsymbol{s}+166.7)}\right] \qquad (26)$$

وهذه الصيغة مطابقة للمعادلة (20) وبذلك نحصل على نفس دالة التيار I_1.



الشكل(7) الدائرة المطابقة للشكل(6) في المجال s.

b- تطبيق لا بلاس لدائرة مكونة من مكثف وملف :

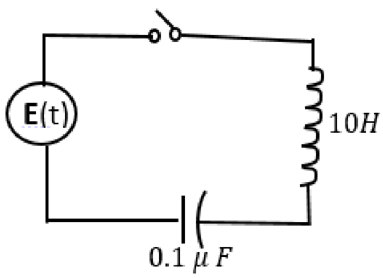
في الدائرة الموضحة بالشكل تكون الشحنة $Q(0)$ هي واحد كولوم. والمطلوب إيجاد الشحنةQ في المكثف والتيار I في اللحظة الزمنية t. إذا علمت أن $E(t)$ بعد لحظة زمنية t من اغلاق الدائرة تعطى بالصورة:

(a) $E(t) = 120$

(b) $E(t) = 120\, cost$

(c) $E(t) = 120[1 - H(t - 10)]$

و $Q(0) = 1$ ، $Q'(0) = I(0) = 0$



الشكل(8) دائرة ملف ومكثف

بتطبيق قانون كيرشوف للجهد في هذه الدائرة نحصل على:

$$L\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = E(t) \quad \Longrightarrow \quad 10\,\frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{0.1} = E(t) \qquad (27)$$

$$(a) \qquad \therefore \frac{d^2Q}{dt^2} + Q = 12 \qquad (28)$$

وبتطبيق تحويل لابلاس للطرفين والتعويض بالشروط الابتدائية نحصل على:

$$s^2\,\mathscr{L}(\mathrm{Q}) - s + \mathscr{L}(\mathrm{Q}) = \frac{12}{s} \quad \Longrightarrow \quad s^2 q(s) - s + q(s) = \frac{12}{s}$$

$$\therefore\; q(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{12}{s(s^2+1)}$$

وبأخذ لا بلاس العكسي باستخدام Mathcad نحصل على:

$$Q(t) := \frac{s}{s^2+1} + \frac{12}{s\cdot(s^2+1)} \text{ invlaplace } \rightarrow 12 - 11\cdot\cos(t)$$

ويكون التيار:

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = 11 sint$$

$$(b) \qquad \frac{d^2Q}{dt^2} + Q = 12\ cost \qquad (29)$$

بتطبيق تحويل لا بلاس للطرفين والتعويض بالشروط الابتدائية نحصل على:

$$s^2q(s) - s + q(s) = \frac{12s}{s^2+1}$$

$$\therefore\ q(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{12s}{(s^2+1)^2}$$

بأخذ لا بلاس العكسي باستخدام Mathcad نحصل على:

$$Q\cdot(t) := \frac{s}{s^2+1} + \frac{12s}{(s^2+1)^2} \text{ invlaplace } \rightarrow \cos(t) + 6\cdot t\cdot\sin(t)$$

ويكون التيار

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = -sint + 6sint + 6tcost = 5sint + 6tcost$$

$$(c) \qquad \frac{d^2Q}{dt^2} + Q = 12 - 12\ H(t-10) \qquad (30)$$

بتطبيق تحويل لا بلاس للطرفين والتعويض بالشروط الابتدائية نحصل على:

$$s^2q(s) - s + q(s) = \frac{12}{s} - \frac{12\ e^{-10s}}{s}$$

$$\therefore\ q(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{12}{s(s^2+1)} - \frac{12e^{-10s}}{s(s^2+1)}$$

بأخذ لا بلاس العكسي باستخدام Mathcad نحصل على:

$$Q(t) := \frac{s}{s^2+1} + \frac{12}{s\cdot(s^2+1)} - \frac{12\cdot e^{-10s}}{s\cdot(s^2+1)} \text{ invlaplace } \rightarrow 12\cdot\cos(t-10)\cdot\Phi(t-10) - 11\cdot\cos(t) - 12\cdot\Phi(t-10) + 12$$

$$= 12 - 11cost - 12[1 - cos(t-10)H(t-10)]$$

$$= \begin{cases} 12 - 11cost &, \quad 0 \le t < 10 \\ 12cos(t-10) - 11cost, & \quad t \ge 10 \end{cases} \qquad (31)$$

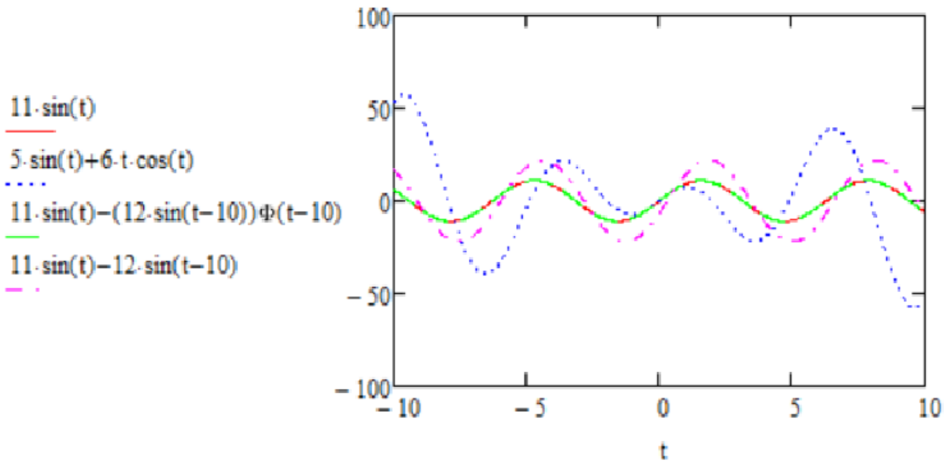
حيث الدالة Ø في الحل الناتج باستخدام Mathcad هي دالة ($(Heaviside\ function\ (H)$).

ويكون التيار :

$$I(t) = \frac{dQ}{dt} = 11sint - 12[sin(t-10)]H(t-10)$$

$$= \begin{cases} 11sint &, \quad 0 \le t < 10 \\ 11sint - 12\sin(t-10) &, \quad t \ge 10 \end{cases} \qquad (32)$$

ونلاحظ أنه في الفترة الزمنية $0 \le t < 10$ يكون I(t)، $Q(t)$ لهما نفس الصيغة للحالتين a، c أي أن المجموعة يكون سلوكها كما لو أنه لن يحدث تغير مفاجئ في $E(t)$.



الشكل(9) مقارنة الحلول للحالات(a, b, c)

حيث يمثل المنحنى الأحمر الحالة a وذلك عند تطبيق مصدر للفولتية وقدره 120 فولت. بينما يمثل المنحنى الأزرق الحالة b عندما تكون $E(t) = 120\ cost$ ، وباقي المنحنيات تمثل الحالة c عندما تكون :

$E(t) = 120[1 - H(t-10)]$ وخلال فترتيها $0 \le t < 10$ ، $t \ge 10$.

النتائج :

تمثلت النتائج في إيجاد حلول المعادلات التفاضلية لبعض التطبيقات المختارة في الميكانيكا والفيزياء الكهربية وذلك بتطبيق تحويل لا بلاس للمشتقة وإيجاد تحويل لا بلاس العكسي باستخدام برنامج Mathcad وأيضاً تم تمثيل الأشكال البيانية للحلول ورسم هذه الدوال كدالة في الزمن باستخدام هذا البرنامج.

وأجريت الحسابات في فترات زمنية قصيرة جدا وتم الحصول على نتائج مطابقة تماماً للحل بالطرق التقليدية والتي تتطلب جهد ووقت وتفصيلات رياضية مطولة يبذلها البحاث وطلاب الفيزياء والهندسة الكهربية

والميكانيكية. وهذا يقودنا إلى أهمية تعلم استخدام تقنيات الحاسوب الرياضية بواسطة هذا البرنامج وغيره من البرامج الأخرى لحل المسائل المتقدمة في زمن قياسي والحصول على نتائج مرضية مع مراعاة الدقة في ادخال البيانات للبرنامج والتي تعد خطوة مهمة جداً للباحث والطالب.

الخلاصة:

في هذا البحث تمت دراسة استخدام تحويلات لا بلاس لحل المعادلات التفاضلية وخاصة الفيزيائية منها وذلك بدراسة مجموعة من التطبيقات ومنها إيجاد حل معادلة متذبذب توافقي مكون من كتلة واحدة ومعادلة متذبذب مكون من مجموعة من الكتل وطبق عليها قانون نيوتن لإيجاد معادلات الحركة، وكذلك دراسة حلول المعادلات التفاضلية لبعض الدوائر الكهربية وبتطبيق قانون كيرشوف تم إيجاد صيغ لمعادلات التيار والشحنة في صورة معادلة تفاضلية.

بعد ذلك تم أخذ تحويل لا بلاس لهذه المعادلات التفاضلية وتحويلها إلى معادلة جبرية في مجال التردد s ثم أجريت عليها عمليات رياضية بالاستعانة بخصائص تحويل لا بلاس ووضعها في صورة ملائمة للحل حتى يسهل أخذ تحويل لا بلاس العكسي لها باستخدام برنامج Mathcad والذي يوفر الجهد والوقت ويعطي نتائج دقيقة جدا. وتم رسم الأشكال البيانية لهذه الحلول باستخدام هذا البرنامج.

المراجع:

المصادر العربية:

1- أ.د علي مصطفى بن الأشهر" المعادلات التفاضلية مقاربة تطبيقية" منشورات أكاديمية الدراسات العليا 2005.

2- د. إبراهيم محمد حسن , أ. معن عبدالمجيد إبراهيم" مبادئ المعادلات التفاضلية الجزئية" منشورات جامعة الفاتح 2008-2009.

3- جون أ. تيرني "المعادلات التفاضلية" منشورات مجمع الفاتح للجامعات، 1989.

المصادر الأجنبية:

4- Joel L.Schiff , “ The Laplace Transform Theory and Applications “ Springer, New York,1991.

5- M.N.S. Charles K. Alexander" Fundamentals of Electric Circuits",McGrawHill ,Second Edition2006 .

6- Charles K. Alexander, Matthew N. O. Sadiku " Fundamentals of Electric Circuits",McGraw-Hill, 2009.

7- Dennis G. Zill, "Advanced Engineering Mathematics" , Sixth Edition, by Jones & Bartlett Learning, LLC, an Ascend Learning Company, 2018.

8- Peter V.ONeil ,"Advanced Engineering Mathematics",Second Edition,Wadsworth,1987.

9- Phil Dyke," An Introduction to Laplace Transforms and Fourier Series", Springer, London Heidelberg New York Dordrech, 2014.