حساب العمق السطحي للموجات الكهرومغناطيسية في الموصلات

نجية محمد البشير

NajiaMohamed@gmail.com

ملخص

يتناول هذا البحث ظاهرة توهن (Attenuation) الموجات الكهرومغناطيسية عند اختراقها لسطح الموصلات المعدنية لمسافة معينة تعرف هذه المسافة بالعمق السطحي داخل الموصل وتم ذلك بدراسة معادلة الموجة الكهرومغناطيسية واشتقاقها باستخدام معادلات ماكسويل وإيجاد الحل العام لمعادلة الموجة الكهرومغناطيسية في الفراغ ثم إيجاد الحل في الوسط الموصل واستنتاج علاقة رياضية لحساب العمق السطحي (Skin depth) يمكن تطبيقها على جميع الموصلات المعدنية بمعرفة موصلية المعدن وتردد الموجة الساقطة عليه.

الكلمات الاستدراكية:

الموجات الكهرومغناطيسية EM، العمق السطحي Skin depth، معادلات ماكسويل، المجال الكهربي والمجال المغناطيسي.

Abstract :

This paper deals with the phenomenon of attenuation of electromagnetic waves when they penetrate the surface of metal conductors for a certain distance known as the Skin depth inside the conductor. This was done by studying the electromagnetic wave equation and its derivation using Maxwell's equations and finding the general solution to the electromagnetic wave equation in a vacuum, then finding the solution in the conductive medium and deducing a mathematical relationship to calculate the skin depth. and that can be applied to all metal conductors by knowing the conductivity of the metal and the frequency of the incident wave on it.

Keywords:

Electromagnetic waves , skin depth , Maxwell's equations , Electric field and magnetic field.

مقدمة

تنتج الطاقة الكهرومغناطيسية من مصادر طبيعية ومن مصادر صناعية عديدة على شكل موجات كهرومغناطيسية تتكون من مجالات كهربية ومغناطيسية ويمكن وصف الموجات بواسطة ترددها أو طولها الموجي أو طاقتها وترتبط هذه العوامل مع بعضها البعض بعلاقات فيما بينها . ويعتبر انتشار الموجات الكهرومغناطيسية وتفاعلها مع الأوساط المادية من المواضيع المهمة في علم الكهرومغناطيسية[1,2,3,5] وعلى وجه الخصوص تفاعل الموجات العالية التردد مع الموصلات كمثال لتوضيح ضعف وتوهن الموجة وما يحدث من فقد للطاقة التي تنقلها الموجات الكهرومغناطيسية[3,4,5] . والتوهن هو التخفيض التدريجي في شدة الإشارة أو حزمة الموجات التي تنتشر عبر وسط مادي وهي ظاهرة شائعة تعاني منها أي نوع من الموجات عند انتشارها في الأوساط المادية. فعلي سبيل المثال يتم توهين الموجات الصوتية بالماء, والأشعة السينية بالرصاص , وتضعف الموجات الزلزالية أثناء انتشارها عبر الأرض. والتوهن دالة أسية لطول المسار خلال الوسط بمعنى أخر يعتمد توهن الموجة خلال وسط معين على طول المسار بالإضافة إلى تردد الموجة والوسط الذي تنتشر فيه.

في هذا البحث تم تطبيق معادلات ماكسويل لأنها تعطي كل المعلومات والمفاهيم التي يمكن استخلاصها من النظرية القديمة للمجالات الكهرومغناطيسية ، وباستخدام هذه المعادلات يمكننا أن نوضح أن المجالات الناتجة من الشحنات التي تكون في حالة حركة عندما تغادر مصادرها فإنها تنتقل في الفضاء على شكل موجات كهرومغناطيسية. وأيضا باستخدام هذه المعادلات تم اشتقاق معادلة الموجة الكهرومغناطيسية في صورتها العامة وايجاد حلها في الفراغ وفي الأوساط المادية وبالتحديد الموصلة منها[5,6,7,8,9]. وابسط صيغة حل لهذه المعادلات يعطي الموجة المستوية التي يكون فيها المجالين الكهربي والمغناطيسي في نفس الطور و متعامدين على بعضهما وعلى اتجاه انتشار الموجة. حيث تم افتراض أن الوسط الذي تنتشر فها الموجة متناظر ومتجانس وفي حالة مستقرة[5,6,7].

1- الصيغة العامة لمعادلات ماكسويل:

تعتمد نظرية ماكسويل علي مبدأين أساسين:

1- المجال الكهربي المتغير مع الزمن ينتج مجال مغناطيسي عمودي عليه ومتفق معه في الطور.
2- المجال المغناطيسي المتغير مع الزمن في الفضاء ينتج مجال كهربي يكون أيضا متعامد عليه وبنفس الطور.

وبناء علي هذاين المبدأين فإن المجال الكهربي والمغناطيسي ينتشران في الفضاء من نقطة إلى أخرى وهما متلازمان ومتفقان في الطور وعموديان على خط انتشارهما مكونان ما يعرف بالموجة الكهرومغناطيسية. كما توصل ماكسويل إلى أن سرعة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الفراغ تساوي سرعة انتشار الضوء في الفراغ وهي ($3\times10^8 m/sec$). كما تتوزع طاقة الموجة الكهرومغناطيسية المنتشرة في الفراغ بشكل متساوي بين المجالين الكهربي والمغناطيسي. ولكن في الأوساط المادية فإن سرعة الموجة تعتمد علي الخواص الكهربية والمغناطيسية لذلك الوسط. ووفقا لمبدأ أن تغير المجال الكهربي يولد مجال مغناطيسي. وأن مجال مغناطيسي متغير يولد قوة دافعة كهربية مستحثة (e.m.f) أو ما يسمي بالحث الكهرومغناطيسي تمكن ماكسويل من وضع نظريته ومعادلاته والتي كانت خلاصة للدراسات التي قام بها جاوس وفاراداي وأمبير وهي تعد من الانجازات العلمية الكبيرة لكونها الأساس الذي تعمل بموجبه الأجهزة الكهرومغناطيسية مثل المحركات وأجهزة البث والاستقبال والحاسبات.

فعندما تكون المجالات متغيرة مع الزمن أي $\mathbf{B}=\mathbf{B}(t) \quad ,\mathbf{B}=\mathbf{B}(t)$

حيث $\mathbf{E}$ شدة المجال الكهربي ، $\mathbf{B}$ كثافة الفيض المغناطيس

تكون الصورة العامة لمعادلات ماكسويل كالآتي:

الصيغة التكاملية		الصيغة التفاضلية
$\oint_s \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{\varepsilon_\circ}\int_v \rho dv$	(1)	$\nabla\cdot\mathbf{E} = \rho/\varepsilon_\circ$
$\oint_s \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s} = 0$	(3)	$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$
$\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{l} = \frac{-\partial}{\partial t}\int_s \mathbf{B}\cdot d\mathbf{s}$	(2)	$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$
$\oint_c \mathbf{B}\cdot d\mathbf{l} = \mu_\circ I_{enc} + \mu_\circ\varepsilon_\circ\frac{-\partial}{\partial t}\int_s \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s}$	(4)	$\nabla\times\mathbf{B} = \mu_\circ\mathbf{J} + \mu_\circ\varepsilon_\circ\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$

حيث $\mathbf{J}$ هي كثافة التيار.

المعادلة الأولى تمثل قانون جاوس والمعادلة الثانية تعبر عن عدم وجود قطب مغناطيسي واحد والمعادلة الثالثة تعبر عن قانون فاراداي. أما المعادلة الرابعة فهي تمثل قانون أمبير.

2- معادلات ماكسويل في الفراغ:

الفراغ هو وسط خطي متجانس وموحد الخواص فلا توجد شحنة ولا تيار كهربي يظهر في هذا الفراغ حيث $J = 0$ ، $\rho = 0$ وبالتالي فإن معادلات ماكسويل تصبح:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \tag{5}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{6}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \tag{7}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_\circ \varepsilon_\circ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{8}$$

ε_0 ، μ_0 همـــــا كـــــلا مـــــن النفاذيـــــة الكهربيـــــة والمغناطيســـــية للفـــــراغ علـــــى الترتيـــــب.

وهذه المعادلات لها حل بسيط متمثل في الموجة الجيبية المنتقلة في وجود المجالين الكهربي والمغناطيسي المتعامدين علي بعضهما وعلي اتجاه انتقال الموجة.

3- معادلات ماكسويل داخل المادة:

معادلات ماكسويل تم تعديلها للمواد المستقطبة والممغنطة بحيث يعطي للمواد الخطية الاستقطاب **P** والتمغنط **M** اللذين يعطي كلا منهما بالصورة:

$$\mathbf{P} = \varepsilon_\circ \chi_e \mathbf{E} \quad ، \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \tag{9}$$

حيث: χ_e هي قابلية التأثر الكهربية للمادة (The electric susceptibility of material)، χ_m هي قابلية التأثر المغناطيسية للمادة (The magnetic susceptibility of material)

وتكون معادلات ماكسويل داخل المادة وفي الوسط المتجانس المنتظم بالصورة الآتية:

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \oint_s \mathbf{D} \cdot d\,\mathbf{s} = Q_{enc} \tag{10}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \qquad \oint_s \mathbf{H} \cdot d\,\mathbf{s} = 0 \tag{11}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \qquad \oint_C \mathbf{E} \cdot d\,\mathbf{l} = -\mu \frac{\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{H} \cdot d\,\mathbf{s} \tag{12}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \qquad \oint_c \mathbf{H} \cdot d\,\mathbf{l} = I_{enc} + \frac{-\partial}{\partial t} \int_s \mathbf{D} \cdot d\,\mathbf{s} \tag{13}$$

حيث **H** شدة المجال المغناطيس ، **D** كثافة الفيض الكهربي.

4- 1- اشتقاق معادلة الموجة الكهرومغناطيسية (EM) في الفضاء الحر:

من أهم تطبيقات معادلات ماكسويل هو استخدامها في اشتقاق معادلة الموجة الكهرومغناطيسية.

من معادلة ماكسويل: $\nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$

نأخذ التفاف هذه المعادلة

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=\nabla\times(-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t})=-\frac{\partial}{\partial t}\nabla\times\mathbf{B} \quad (14)$$

$$\nabla\times\mathbf{B}=\mu_\circ\varepsilon_\circ\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \quad (15)$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E})=-\frac{\partial}{\partial t}(\mu_\circ\varepsilon_\circ\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t})=-\mu_\circ\varepsilon_\circ\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (16)$$

وباستخدام المتطابقة الاتجاهية:

$$\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{E})-\nabla^2\mathbf{E} \quad (17)$$

وحيث أن الوسط خالي من الشحنات فإن:

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0 \quad (18)$$

وبالتعويض في المعادلة (16) نحصل على :

$$\nabla^2\mathbf{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}=0 \quad (19)$$

وهي تمثل المعادلة التفاضلية للموجة الكهرومغناطيسية في الفراغ وفي الأوساط الغير موصلة (non-conducting medium). وبنفس الطريقة يمكن استخلاص معادلة مشابهة تماما فيما يخص**B**:

$$\nabla^2\mathbf{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}=0 \quad (20)$$

والمعادلات(19) ، (20) هي من نوع معادلات الموجة المألوفة والتي لها الصورة العامة الكلاسيكية:

$$\nabla^2\psi-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=0 \quad (21)$$

حيث v هي سرعة الانتشار(velocity of propagation)

وبمقارنة المعادلتين (19) ،(20) مع المعادلة (21) فإن السرعة في حالتنا هذه هي:

$$v=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\ \varepsilon_0}} \quad (22)$$

$$\mu_\circ=4\pi\times10^{-7}\ H/m \quad , \quad \varepsilon_\circ=8\cdot85\times10^{-12}\ F/m$$

حيث جذر هذا المقدار(مقام المعادلة 22) له القيمة التقريبية ($1/3\times10^8$ m/ sec) التي هي مقلوب(c) سرعة الضوء في فضاء حر.

$$\therefore c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=2.998\times10^8\ \frac{m}{\sec} \quad (23)$$

يجب ملاحظة أن المعادلة (21) هي معادلة عددية أما المعادلتان (19)، (20) هما معادلتان متجهتان .

أبسط أنواع الموجات الذي ينتج من حل المعادلتين (19) ،(20) هو الموجة المستوية (plane wave)، والبساطة النسبية لحل معادلة الموجة المشتقة من معادلات ماكسويل يوضح بعض الخواص الأساسية المهمة للمجال الكهرومغناطيسي دون اللجوء للرياضيات المتقدمة كما أن الموجة المستوية تعتبر هي التقريب الجيد للموجات الفعلية وبالتالي في كثير من الحالات سنهتم بدراسة حل الموجة المستوية للمعادلات التي ذكرت أعلاه.

وتعرف الموجة المستوية بأنها الموجة التي تكون سعتها هي مركبة متجه المجال وهي ثابتة حول كل النقاط الواقعة في مستوى عمودي على اتجاه الانتشار. ومركبات متجه المجال في المستوى تكون دوال للمسافة العمودية بين المستوى ونقطة الأصل وكذلك دوال للزمن.

وحلول معادلات الموجة (19) ،(20) يمكن الحصول عليها باستخدام طريقة فصل المتغيرات ويكون الحل العام في الفراغ :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r}-\omega t)} \qquad (24)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t)=\mathbf{B}_0 e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r}-\omega t)} \qquad (25)$$

حيث $\mathbf{B}_0$،$\mathbf{E}_0$ متجهان ثابتان مع الزمن, $\mathbf{k}$ هو متجه الانتشار و$\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$حقيقيان ويجب أن يحققا معادلات ماكسويل ويجب التنبيه أن هذا ليس تلقائيا لأن معادلات ماكسويل لا تحدد تماما المجال الكهرومغناطيسي. وعند التعويض بالمعادلة (24) في المعادلة(5) نحصل على **:**

$$\nabla\cdot(\mathbf{E}_0\ e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)})=0 \qquad (26)$$

وهذا يقودنا إلى:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}=0 \qquad (27)$$

وبنفس الطريقة نعوض (25) في المعادلة (6) نحصل على:

$$\therefore \mathbf{k}\cdot\mathbf{H}=0 \qquad (28)$$

وهذا يبين أن كلاً من المجالين الكهربي والمغناطيسي متعامدين على متجه الانتشار$\mathbf{k}$. والموجة التي تكون بهذه الخواص تكون موجة مستعرضة وهذا يقودنا إلى أن الموجات المستوية الكهرومغناطيسية جميعها موجات مستعرضة في طابع مميز.

الأن نعوض عن المعادلة (24) في المعادلة (7).

$$\nabla\times\mathbf{E}=\nabla\times\mathbf{E}_0\, e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}=-\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \qquad (29)$$

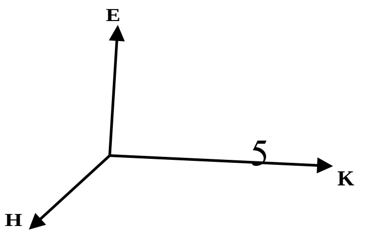
حاصل الضرب الاتجاهي للحد الأوسط يساوي

$$\nabla e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\omega t)}\times\mathbf{E}_0=i\mathbf{k}\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-wt)}\times\mathbf{E}_0=i\mathbf{k}\times E_0\,e^{i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-wt)} \qquad (30)$$

ثم نوجد مشتقة الحد الأيمن للمعادلة (29) بالنسبة للزمن بعد التعويض عن كثافة الفيض المغناطيسي بدلالة شدة المجال المغناطيسي في المعادلة (25) ونساوي هذه المشتقة مع المعادلة (30) فنحصل على:

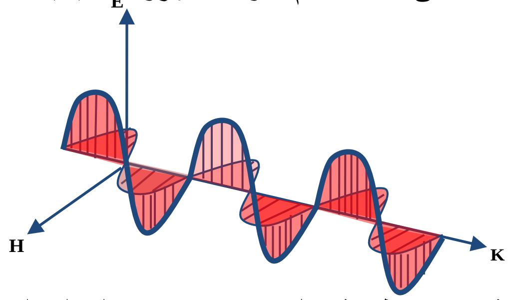
$$i\mathbf{k}\times\mathbf{E}=-\mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=i\omega\mu\mathbf{H}$$
$$\therefore\ \ \mathbf{k}\times\mathbf{E}=\omega\mu\mathbf{H} \qquad (31)$$

ومن هذه المعادلة نستنتج أن كلا من $\mathbf{k}$ ،$\mathbf{H}$,$\mathbf{E}$ تكون متعامدة وتكون مجموعة متعامدة يمينية(right hand orthogonal set) أي تحقق قاعدة اليد اليمنى للضرب الاتجاهي كما بالشكل (1)



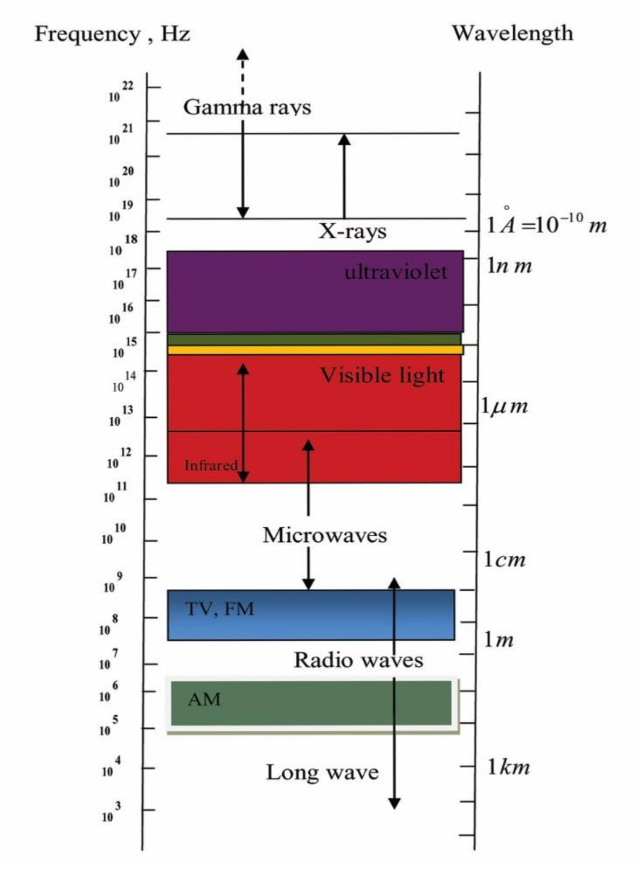
الشكل -1- يوضح تعامد المجالان E,H مع متجه الانتشار للموجة وتكوين مجموعة متعامدة يمنية للضرب الاتجاهي.

وعند رسم دالتي المجال الكهربي والمغناطيسي التي تمثل حلول لمعادلة الموجة الكهرومغناطيسية المعطاة بالمعادلات (24)، (25) نحصل على الشكل العام للموجة الكهرومغناطيسية.



الشكل -2- موجة كهرومغناطيسية تنتقل في اتجاه عمودي على المجالين الكهربي والمغناطيسي

والشكل التالي يوضح مختلف أنواع الموجات الكهرومغناطيسية ، ونلاحظ أن هذا الطيف يحتوي على مدى واسع من الترددات والأطوال الموجية. ولا يوجد حد فاصل بين كل نوع وأخر من الموجات. ويذكر بان كل الأنواع المختلفة من الأشعة ينتج من نفس الظاهرة وهي تعجيل أو تسارع الشحنات. والأسماء المعطاة للأنواع المختلفة من الموجات هي ببساطة لوصف المنطقة الطيفية التي تقع فيها الموجات. وأكثر المناطق شيوعا هي منطقة الطيف المرئي، وهي تمثل جزء صغير من طيف الإشعاع الكهرومغناطيسي الكلي.



الشكل-3- طيف الموجات الكهرومغناطيسية

2-4- الموجات المستوية في وسط موصل:

سندرس انتشار غير محدود وسنفحص تصرف موجة في موصل جيد ويجب أن تكون هناك موجة كهرومغناطيسية منشأة في عازل خارجي يلاصق سطح الموصل بحيث سرعة انتقالها المبدئية تحدث في المنطقة خارج الموصل لأن كل المجالات المتغيرة مع الزمن توهن أو تضعف بسرعة كبيرة جدا داخل الموصل الجيد(Good conductor). ومن ميزات الموصل الجيد أن له موصلية عالية جدا وتيارات توصيل كبيرة لذلك تقل طاقة الموجة المنتقلة بداخله نتيجة للفقد المستمر في الطاقة بسبب المقاومة. و سندرس حالة خاصة والتي فيها تكون كثافة الشحنة الحرة المتراكمة في الموصل خلال

$$\nabla\cdot\mathbf{D}=0\ \rightarrow\nabla\cdot\mathbf{E}=0 \qquad (32)$$

زمن t=0 قد تبددت . وبالتالي يمكن من الأن فصاعدا أن نفترض أن $\rho(r,t=0)=0$ وتسمى هذه الحالة (steady- state)وتكون معادلات ماكسويل بنفس بالصورة (10)، (11)، (12)، (13) مع الأخذ في الاعتبار أن المعادلة (10)تصبح

بأخذ التفاف المعادلة (12) والتعويض عن $\nabla\times\mathbf{H}$من (13) مع تطبيق المتطابقة الاتجاهية (17) علي الطرف الأيسر نحصل علي :

$$\nabla^2\mathbf{E}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\mathbf{0} \qquad (33)$$

ويمكن استخلاص معادلة مشابهة فيما يخص المجال المغناطيسي وهي :

$$\nabla^2\mathbf{H}-\mu\varepsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2}-\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}=\mathbf{0} \qquad (34)$$

حل المعادلتين (33) ، (34) يعطي بالصورة:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\mathbf{E}_0e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r}-\omega t)} \qquad (35)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t)=\mathbf{H}_0e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r}-\omega t)} \qquad (36)$$

بالتعويض عن المعادلة (35) في المعادلة (33):

$$-\mathbf{k}^2\,\mathbf{E}(r,t)+\varepsilon\mu\omega^2\,\mathbf{E}(r,t)+i\sigma\mu\omega\,\mathbf{E}(r,t)=0$$

$$(\mathbf{k}^2-\varepsilon\mu\omega^2-i\sigma\mu\omega)\mathbf{E}(r,t)=0$$

والمجال لا يساوي صفر

$$\therefore\quad(\mathbf{k}^2-\varepsilon\mu\omega^2-i\sigma\mu\omega)=0$$

$$\therefore\quad(\mathbf{k}^2=\varepsilon\mu\omega^2+i\sigma\mu\omega)=\varepsilon\mu\omega^2(1+\frac{i\sigma}{\varepsilon\omega}) \qquad (37)$$

وستوفر لنا هذه العلاقة معلومات قيمة عن انتشار الموجة الكهرومغناطيسية داخل الوسط.ونلاحظ أيضا أن متجه الانتشار k يكون كمية معقدة ولجعله ملائما للاستخدام نعبر عنه كما يلي:

$$k=\alpha+i\beta \qquad (38)$$

$$\therefore\quad k^2=\alpha^2-\beta^2+2i\alpha\beta \qquad (39)$$

نقارن المعادلة (39) مع المعادلة (37) نجد أن:

$$\alpha^2-\beta^2=\varepsilon\mu\omega^2 \qquad (40)$$

$$2\alpha\beta=\sigma\mu\omega \qquad (41)$$

$$\beta^2=\frac{\sigma^2\mu^2\omega^2}{4\alpha^2}$$

بتربيع (41) نوجد:

ونعوض بها في (40) فيكون حلها كالأتي:

$$4\alpha^4 - 4\alpha^2 \varepsilon \mu \omega^2 - \sigma^2 \mu^2 \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^2 = \frac{4\varepsilon \mu \omega^2 + \sqrt{16\varepsilon^2 \mu^2 \omega^4 + 16\sigma^2 \mu^2 \omega^2}}{8}$$

$$\alpha^2 = \frac{\varepsilon \mu \omega^2}{2} + \frac{1}{2} \mu \varepsilon \omega^2 \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}} \qquad = \frac{1}{2} \varepsilon \mu \omega^2 \left[1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2 \omega^2}}\right]$$

$$\therefore \alpha = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \left[1 + \left\{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2\right\}^{1/2}\right]^{1/2} \qquad (42)$$

وبنفس الطريقة نوجد β :

$$\therefore \beta = \omega \sqrt{\frac{\varepsilon \mu}{2}} \left[-1 + \left\{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon \omega}\right)^2\right\}^{1/2}\right]^{1/2} \qquad (43)$$

مع ملاحظة أنه تم أحذ الجذر التربيعي الموجب لكي يخضع الحل للشكل المناسب ل k في الفضاء الحر.

نعوض عن جذور k في المعادلتين (35)،(36)فنحصل على:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0\, e^{-\beta r}\, e^{i(\alpha r - \omega t)} \qquad (44)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \mathbf{H}_0\, e^{-\beta r} e^{i(\alpha r - \omega t)} \qquad (45)$$

هاتـان المعادلتـان توضـحان أنـه لا يمكـن أن تنتشـر موجـة مسـتوية فـي موصـل دون أن يحـدث لهـا تـوهن (attenuation). والسبب أنه عند انتشار الموجة المستوية في موصل تتولد تيارات في الوسط نتيجة لمجال الموجة الكهربي ويجب أن يبذل شغل لسحب هذه التيارات لأنها تسبب في فقد جزء من طاقة الموجة على شكل حرارة في هذا الوسط، ويحصل وهن للموجة ، والكمية β تسمي معامل الامتصاص(absorption coefficient) وهي قياس لهذا الوهن.

4- 3- الظاهرة السطحية:

في المعادلة (37) يظهر الحد $i\sigma\mu$ من الحد $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ في المعادلة (33) أي من تيار التوصيل . بينما يظهر الحد $\varepsilon\mu\omega^2$ من الحد $\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$ في نفس المعادلة وهو من تيار الإزاحة .

ونعلم أنه في كل الأوساط الموصلة تقريبا يسيطر تيار التوصيل علي تيار الإزاحة، لذلك سيكون حذف الحد الأوسط من المعادلة (33) مقبولا جداً وهكذا للوسط جيد التوصيل.

$$\therefore \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \mu \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = 0 \qquad (46)$$

والحل الذي يتضمن توهن(attenuation) لهذه المعادلة متمثل في العادلة (44). وسنعيد كتابة هذا الحل بشكل أخر وذلك بالرجوع إلى معادلة ثابت الانتشار كما يلي:

وللموصل الجيد فإن :

$$\frac{\omega\mu\sigma}{\mu\varepsilon\omega^2} \rangle\rangle 1 \tag{47}$$

$$(k^2 - \varepsilon\mu\omega^2 - i\sigma\mu\omega) = 0 \rightarrow k = \sqrt{\mu\varepsilon\omega^2 (1 + \frac{i\omega\mu\sigma}{\mu\varepsilon\omega^2})} \quad = \sqrt{i\omega\mu\sigma} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}}\sqrt{\omega\mu\sigma} = e^{i\frac{\pi}{4}}\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

$$\therefore k = (\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})\sqrt{\omega\mu\sigma} = \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)\sqrt{\omega\mu\sigma}$$

حيث:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}} \tag{48}$$

والذي يعرف بالعمق السطحي (Skin depth)

ونستنتج من المعادلة (48) أن العمق السطحي يقترب من الصفر إذا اقتربت الموصلية من اللانهاية، وأيضا يكون صغير جداً للموصلات الجيدة في التيارات عالية التردد.

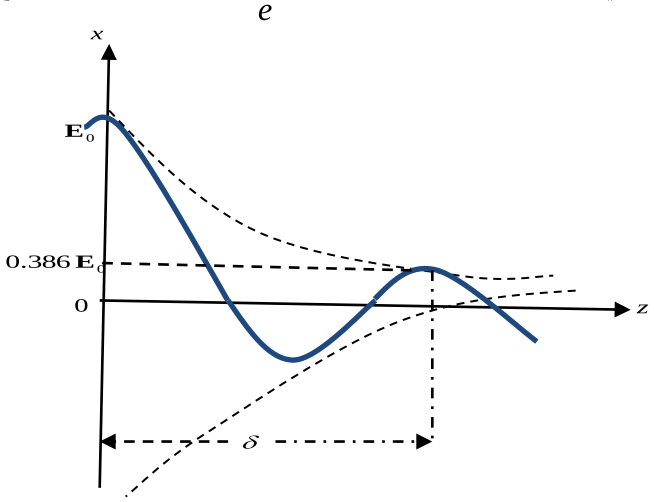
وأيضا حسب الشرط (47) فإن :

$$\alpha = \beta = \sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}} = \frac{1}{\delta} \tag{49}$$

إذن نكتب حل التوهن لمعادلة الموجة كالتالي:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}_0\, e^{-\frac{r}{\delta}}\, e^{i\left(\frac{r}{\delta} - \omega t\right)} \tag{50}$$

من المعادلة (50) نلاحظ أن سعة الموجة تقل بمقدار $\frac{1}{e}$ من قيمتها عندما $r = \delta$. لذلك فإن δ هي قياس للعمق الذي تخترقه الموجة الكهرومغناطيسية في موصل قبل أن تقل قيمتها بمقدار $\frac{1}{e}$ مرة من قيمتها عند السطح. كما موضح بالشكل (4).



الشكل (4) يوضح مفهوم العمق السطحي وشكل الموجة عندما تقل سعتها بمقدار $\frac{1}{e}$ مرة

5- النتائج:

في هذا الجزء سنقوم بحساب العمق السطحي لبعض الموصلات والأوساط عند عدة ترددات باستخدام المعادلة (48).

فمثلا للنحاس حيث: $\sigma=5.8\times10^{7}(\Omega\cdot m)^{-1}$

وعند $f=60\,Hz \qquad \mu=4\pi\times10^{-7}\,\frac{H}{m} \qquad \omega=2\pi f$

$$\therefore\quad \delta=\sqrt{\frac{1}{\pi f \mu\sigma}}=8\cdot53\times10^{-3}\,m=8\cdot53\,mm$$

وفيما يلي في جدول (1) مقدار العمق السطحي للنحاس عند ترددات مختلفة لموجة كهرومغناطيسية.

العمق السطحي Skin depth	التردد Frequency
20.8 mm	10 Hz
8.6 mm	60 Hz
6.6 mm	100 Hz
2.99 mm	500 Hz
0.66 mm	10^{4} Hz
$6\cdot6\times10^{-2}$ m	1 M Hz
$6\cdot61\times10^{-3}\,mm$	100 M Hz
$3\cdot8\times10^{-7}$ m	30G Hz

من الجدول (1) نلاحظ أنه كلما زاد التردد قل العمق السطحي النحاس. وعند تردد 10M Hz فإن عمق الاختراق يكون 6.6×10^{-4}m وهو حوالي ثمن طول موجة الضوء المرئي. لذلك كل المجالات في موصل جيد مثل النحاس تكون أساسا صفر. وعلى مسافات أكبر من أعماق السطح فإن شدة المجال الكهربي وكثافة التيار الناشئة عند سطح الموصل تضمحل بسرعة وتنعدم بداخل الموصل. والطاقة الكهرومغناطيسية لا تنفذ داخل الموصل بل تنتقل في المنطقة المحيطة به بينما الموصل يرشد الموجات فقط.

والجدول رقم (2) يوضح العمق السطحي في مواد مختلفة عند نفس التردد وليكن 10 G Hz مثلاً.

العمق السطحي Skin depth	الموصل coductor
$0\cdot8\,\mu m$	الومنيوم
$0\cdot65\,\mu m$	نحاس
$0\cdot79\,\mu m$	ذهب
$0\cdot64\,\mu m$	فضة

والجدول ا(3) لآتي سيعطينا فكرة عن العمق السطحي في مواد مختلفة ولترددات مختلفة.

المادة Material	التردد **Frequency**	العمق السطحي **Skin depth**
فضة	100 M Hz	$10^{-7}\ m$
الومنيوم	50 Hz	$1\cdot 25\times 10^{-2}\ m$
ماء البحر	30 K Hz	$10^{-1}\ m$

من الجدول (3) نلاحظ أن العمق السطحي للموصلات الجيدة يقل بزيادة التردد. والوهن المفاجئ للموجات في الدوائر العالية التردد يعني أن التيار يسري فقط على سطح الموصلات. وأيضا نلاحظ من هذا الجدول أن العمق السطحي لماء البحر عالي نسبيا وهاذ يفسر ضعف وصعوبة الاتصالات الراديوية للغواصات تحت عمق عدة أمتار.

الخلاصة

في هذا البحث تم مناقشة انتشار الموجات الكهرومغناطيسية في الموصلات الجيدة واشتقاق معادلة الموجة من معادلات ماكسويل في الفراغ وفي الأوساط المادية الموصلة وعند حل هذه المعادلة كانت من فئة الدالة الأسية $e^{i(\mathbf{k}.\mathbf{r}-\omega t)}$. وتحصلنا على صيغة مركبة لثابت الانتشار**k**حيث الجزء الحقيقي منه يصف طور الموجة وتغيره مع الموضع بينما الجزء التخيلي يسبب الاضمحلال الأسي للمجال كدالة $e^{\frac{r}{\delta}}$ ، δ هو (skin depth). وهذا العمق تم حسابه بسهولة ضمن الحدود التي يكون فيها الجزء التخيلي ل k^2 أكبر بكثير من الجزء الحقيقي والتي هي حدود الموصل الجيد. وتم استنتاج معادلة العمق السطحي كدالة في التردد والموصيلية. وبتجميع عدة بيانات لمواد موصلة مختلفة مقابل مجموعة من الترددات تم حساب مقدار العمق السطحي وكان هذا العمق صغير جدا في الموصلات الجيدة عند الترددات العالية لدرجة أنه يمكن وصف هذه الموصلات بأنها معتمة أو غير نافذة للضوء المرئي. وتم استخدام النحاس كنموذج للموصل الجيد(Good conductor) في هذه الحسابات وملاحظة صغر العمق السطحي له بزيادة التردد أي أنه بزيادة الموصلية يقل هذا العمق.

المراجع

المصادر العربية:

1- بي.بي.لاود، ترجمة الدكتور علي ابراهيم مهدي العزاوي "الكهرومغناطيسيات" ،الجامعة المستنصرية.

2 - ريموند أ.سيرواي ، روبرت ج . بكتر ، جون و. جيويت, ترجمة أ. د. محمد عبدالفتاح مبروك "الفيزياء للعلميين والمهندسين. الكهربية والمغناطيسية" دار المريخ، 2008.

3- وليام. هـ.هايت، جونيور. ترجمة الدكتور عادل عبد القادر محسن"الكهرومغناطيسيات الهندسية"، دار ماكجر وهيل للنشر، دار الرائد العربي1984

4- جوزيف إدمنستر.ترجمة دكتور مهندس صبري محمد ابراهيم"الكهرومغناطيسيات"، الدار الدولية للإستثمارت الثقافية ش.م.م.مصر، 2004.

المصادر الأجنبية:

5- Matthew.N.O.SAadiko" Elements of Electromagntics", Forth Edition .,Oxford University Prees 2007

6- George B.Arfken, Hans J.Weber"Mathematical Methods for Physics", sixth Edition,Elsevier Inc,2005.

7 -Richard GCarter."WorkedExampleinElectromagnetism" Carter&Ventus Publishing &Bookboon.com,2010.
8- Franck Assous&PatricetJr" Numerical Solution to Mxwell̓s Equation in singular Waveguides", conference Paper May 2007.
9-William.H.Hayt,Jr.John A.Buck"Engineering Electromagnetics" sixth Edition McGraw HILL.